

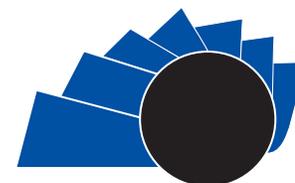


UNIVERSIDAD DISTRITAL  
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

## Visión Electrónica

### *Más que un estado sólido*

<https://doi.org/10.14483/issn.2248-4728>



VISIÓN ELECTRONICA  
A Research Vision

## Sobre el concepto gauge, global y local, y su implementación en física

*On the gauge concept, global and local, and its implementation in physics*

*Mauricio Rozo-Clavijo<sup>1</sup>*

### INFORMACIÓN DEL ARTICULO

Historia del artículo

Enviado: 21/03/2019

Recibido: 01/04/2019

Aceptado: 07/07/2019

### Palabras clave:

Principio gauge;  
Transformación gauge;  
Invariancia gauge;  
Lagrangiano.

### Keywords:

Gauge principle;  
Gauge transformation;  
Gauge invariance;  
Lagrangiano

### RESUMEN

Se realiza un análisis sobre el concepto gauge, global y local, ilustrando los aspectos más importantes sobre la manera de proceder para el establecimiento de la simetría gauge en electrodinámica clásica, mecánica cuántica y electrodinámica cuántica, mostrando cómo la simetría gauge produce un resultado que es físicamente significativo. Bajo este contexto, se implementa el concepto gauge haciendo uso del formalismo lagrangiano y exigiendo su invariancia bajo un grupo de simetría. Además, se bordan las ideas de Yang y Mills apoyadas en el grupo no abeliano SU (2) como una primera explicación sobre la dinámica de la interacción entre el protón y neutrón a partir de la conservación del isoespín. Este análisis revela como el concepto gauge se convierte en un paradigma para la construcción de explicaciones alrededor de los fenómenos a nivel atómico; explicación que se considera de difícil comprensión por parte de los estudiantes, lo que permite generar una forma alternativa, didáctica y robusta de abordar el tema para favorecer la adquisición de un conocimiento sobre los principios subyacentes en los que se fundamenta la física contemporánea.

### ABSTRACT:

An analysis is made on the gauge concept, global and local, illustrating the most important aspects on the way to proceed for the establishment of the gauge symmetry in classical electrodynamics, quantum mechanics and quantum electrodynamics, showing how the gauge symmetry produces a result that is physically significant. Under this context, the gauge concept is implemented using the Lagrangian formalism and demanding its invariance under a symmetry group. In addition, the ideas of Yang and Mills supported by the non-Abelian group SU (2) are embroidered as a first explanation about the dynamics of the interaction between the proton and the neutron from the conservation of the isospin. This analysis reveals how the gauge concept becomes a paradigm for the construction of explanations around phenomena at the atomic level; explanation that is considered difficult to understand by students, which allows generating an alternative, didactic and robust approach to the subject to favor the acquisition of knowledge about the underlying principles on which contemporary physics is fundamented.

<sup>1</sup>BSc. In Physical, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. Specialization in Physical Sciences, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. MSc. In Physical Sciences, Universidad Nacional de Colombia, Colombia. Current position: Professor at Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. E-mail: [mclavijo@pedagogica.edu.co](mailto:mclavijo@pedagogica.edu.co) ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6427-8608>

Citar este artículo como: M. Rozo-Clavijo, "Sobre el concepto gauge, global y local, y su implementación en física", Visión Electrónica, vol. 2, no. 2, Edición especial, 2019. <https://doi.org/10.14483/issn.2248-4728>

## 1. Introducción

En el presente trabajo se hace uso, dentro de cada contexto, electrodinámica clásica, mecánica cuántica y electrodinámica cuántica, de la idea gauge, global y local, y sobre su significado, que resulta generalmente abstracto a los estudiantes, dando la oportunidad de ilustrar los aspectos más importantes en la que interviene la simetría gauge en cada esquema. Además, la simetría gauge juega un papel fundamental para la descripción de las interacciones ya que a partir de ésta se predice la forma como las partículas interactúan, constituyendo una motivación para abordar el concepto de invariancia gauge desde diferentes contextos de la física, y así involucrar una metodología que facilite un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes sobre la teoría gauge.

Este análisis revela como el concepto de invariancia gauge que se nos enseña, sin saberlo tempranamente, se convierte en la base fundamental para la construcción de explicaciones de los fenómenos; explicación que está fundamentada en el concepto de simetría como una manera de interpretar la naturaleza.

La noción de simetría, apreciada originalmente desde un contexto puramente geométrico, abrió un camino promisorio para la explicación de los fenómenos a nivel atómico cuyas consecuencias han trascendido en la manera de ver y comprender los acontecimientos del mundo natural. Es así que, para el estudio de las interacciones, la simetría se clasifica de dos maneras: simetría discreta y simetría continua. La simetría continua puede clasificarse a su vez en una simetría espacio-temporal y una simetría interna. La simetría espacio-temporal queda descrita a partir del grupo de Lorentz y por el grupo de Poincaré, en tanto la simetría interna es descrita por los grupos unitarios  $U(1)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$  [1-2]. Además, existen dos clases de simetrías internas: una global,

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N) = e^{i\alpha_\beta L_\beta},$$

donde los parámetros de la transformación  $(\alpha_\beta)$  no dependen de las coordenadas espacio-temporal, y otra local,

$$U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N) = e^{i\alpha_\beta(r)L_\beta},$$

en la que los parámetros de la transformación  $(\alpha_\beta(r))$  dependen explícitamente de las coordenadas espacio-temporal, siendo  $(L_\beta)$  el número de generadores del grupo en la representación correspondiente satisfaciendo el álgebra de conmutación  $[L_a, L_b] = if_{abc}L_c$ , y  $(f_{abc})$  las constantes de estructura del grupo.

Bajo este contexto, se hace uso de la formulación

lagrangiana exigiendo que el lagrangiano del sistema deba ser invariante bajo la acción de un grupo de simetría, estableciéndose además que el lagrangiano sea también invariante cuando el grupo de simetría se hace local. La exigencia del grupo de simetría local al lagrangiano implica remplazar la derivada común  $(\partial_\mu)$  por la derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$  denominada también acople minimal. El remplazo de la derivada  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$  permite introducir a través de ésta tantos campos gauge como generadores tenga el grupo de simetría local propuesto, lo que conduce a determinar la forma en la que los campos interactúan entre ellos y la materia.

Finalmente, se muestra como Yang y Mills implementan la idea gauge, global y local, planteada por Hermann Weyl en 1918 [3], introduciendo el grupo de simetría no abeliano  $SU(2)$  con el fin de construir una explicación sobre la interacción entre protones y neutrones [4]. Como consideración final se detalla la diferencia esencial entre el esquema electromagnético y el esquema propuesto por Yang y Mills en relación al alcance de la interacción, lo cual conduce a pensar que los campos responsables de la interacción nuclear deben de poseer masa. Por lo tanto, en la teoría clásica de Yang-Mills surge el problema de la masa para las partículas intermediarias.

## 2. Metodología

Se muestra de manera general un precedente histórico y circunstancial sobre el surgimiento de la idea gauge apoyado en el artículo Gravitation and electricity [3], en el que se establece por primera vez la idea gauge con el fin de unificar la fuerza gravitacional y electromagnética bajo una perspectiva geométrica. Se desarrolla una didáctica como estrategia y aporte pedagógico en relación con el concepto gauge dentro del contexto de la física clásica, realizando una descripción explicativa en la que se encuentra inmersa la idea gauge para el cálculo de la velocidad angular de una partícula en movimiento circular uniforme y la velocidad instantánea de una partícula en caída libre, finalizando su implementación dentro del esquema electrostático.

Este análisis revela como el concepto de invariancia gauge puede ser implementado en diferentes contextos de la física brindando una forma alternativa, didáctica y novedosa de abordar el tema, conectando el mismo con un tópico conocido de la física. En este sentido, también se implementa la idea gauge dentro del contexto de la electrodinámica clásica exhibiendo el significado que juega la simetría gauge en los potenciales para obtener la invariancia de las ecuaciones de Maxwell.

Posteriormente se implementa la invariancia gauge, global y local, en la ecuación de Schrödinger destacando

la importancia del uso de la derivada covariante cuando el grupo de simetría se hace local. Las anteriores ideas se generalizan haciendo uso de la formulación generalizando haciendo uso de la formulación lagrangiana y específicamente en el lagrangiano de Dirac para un electrón en presencia de un campo electromagnético, destacando que la invariancia gauge puede ser considerada como un principio dinámico y configurándose en un aporte sobre el valor que juega la simetría en la construcción de explicaciones en torno a la naturaleza.

Finalmente se aborda la estabilidad nuclear del átomo mediante el análisis del artículo "*Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*", publicado en 1954 por los pensadores Yang y Mills donde plantean la problemática y el enfoque para resolverla. Sugieren proceder de manera análoga a como se opera desde el contexto de la electrodinámica clásica en su forma covariante pero haciendo uso del grupo de simetría  $SU(2)$  configurándose así el marco conceptual pertinente pero limitado para entender la estabilidad nuclear del átomo.

La anterior metodología establece una ruta de trabajo que permite mediante una descripción explicativa desde diferentes contextos de la física, el abordaje del concepto de invariancia gauge global y local, con el fin de lograr una comprensión del concepto, además de evidenciar el proceder en el que se fundamenta la teoría gauge.

### 3. Sobre la idea gauge

La idea gauge como principio dinámico fue por primera vez apreciada por Hermann Weyl motivado por encontrar una base geométrica que diera cuenta de las interacciones gravitacional y electromagnética. En su artículo "*Gravitation and electricity*" Weyl (1918) propone por primera vez la idea gauge "*guiding field*" [3,5] con el fin de unificar la fuerza gravitacional y electromagnética hasta entonces conocidas (1900). Su propuesta se fundamenta en una geometría que explique no sólo los fenómenos gravitatorios sino también aquellos que están relacionados con campos electromagnéticos dentro del contexto de una teoría de campo unificado de la gravedad y el electromagnetismo.

Bajo este contexto, Weyl propone una generalización del concepto de medida argumentando que las medidas físicas son relativas y lo que tiene significado es el intervalo  $\Delta S^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  [6]. En este sentido, el intervalo medido por un observador entre dos eventos en un espacio de tres dimensiones, puede ser calculado de diferentes maneras, es decir, la posición inicial y final de cada evento podrá ser recalibrada respecto al origen de referencia manteniendo el intervalo entre los dos eventos invariante para todos los observadores [7].

#### 3.1. La Velocidad angular de una partícula obtenida bajo el concepto gauge

La velocidad de una partícula con un movimiento circular uniforme en el plano puede ser obtenida a partir del concepto de invariancia gauge. La posición de la partícula se puede fijar haciendo uso de un plano cartesiano especificando la posición angular por el ángulo que forma con una dirección fija del plano como se muestra en la figura 1,

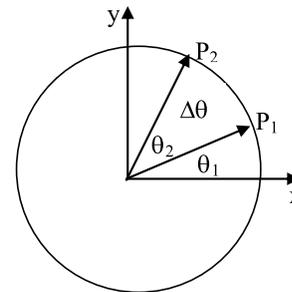


Figura 1. Posición angular de una partícula en un plano cartesiano. Fuente: elaboración propia

La rapidez de rotación ( $\omega$ ) de la partícula permanecerá constante y su posición angular inicial en ( $P_1$ ) quedará descrita por el ángulo ( $\theta_1$ ), y su posición final ( $P_2$ ) en ( $\theta_2$ ) será dadas respecto al eje de referencia ( $x$ ), en otras palabras, la ecuación de movimiento de la partícula está dada por:

$$\theta = \omega t . \quad (1)$$

La posición angular de referencia puede ser escogida de manera arbitraria sin modificar la ecuación de movimiento de la partícula. Ya que existe una arbitrariedad en la posición angular de la partícula, se puede introducir el concepto de invariancia gauge adicionando una constante arbitraria respecto a la posición angular inicial ( $\theta_1$ ) y respecto a la posición angular final ( $\theta_2$ ) dadas como:

$$\theta_1 \rightarrow \theta'_1 = \theta_1 + cte ; \theta_2 \rightarrow \theta'_2 = \theta_2 + cte. \quad (2)$$

Es fácil de comprobar que el desplazamiento angular de la partícula no cambia al sustituir la transformación (2). Esta invariancia es denominada invariancia gauge global ya que la constante que se adiciona es igual para todos los observadores.

Para obtener la rapidez angular de la partícula es necesario conocer la distancia angular  $\theta' = \theta + \Delta\theta$  con  $\Delta\theta = cte$  que recorre la partícula en el instante de tiempo,  $t' = t + \Delta t$   $\Delta t = cte$ , muy pequeño para evitar cambios en la rapidez de la partícula. En otras palabras, considerando el tiempo y la posición angular de la partícula como una recalibración dada por,

$$t \rightarrow t' = t + \Delta t ; \theta \rightarrow \theta' = \theta + \Delta\theta \quad (3)$$

se obtiene, la posición angular de la partícula un poco más lejos de lo que se encontraba antes  $\theta(t) = \omega t$   
es decir,

$$\begin{aligned} \theta + \Delta\theta &= \omega(t + \Delta t), \\ \omega t + \Delta\theta &= \omega t + \Delta t, \\ \Delta\theta &= \omega\Delta t. \end{aligned} \tag{3}$$

En primera aproximación la rapidez angular de la partícula será:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{4}$$

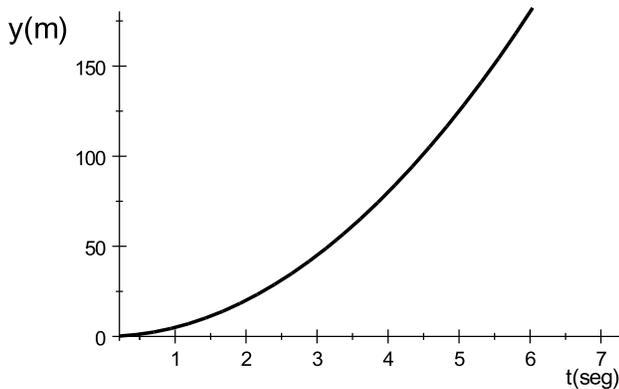
No obstante, la velocidad angular instantánea es el valor de este cociente cuando  $\Delta t$  se hace infinitamente pequeño,

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{5}$$

Por lo tanto, haciendo uso de la transformación (3) de las variables de posición angular  $\theta = \theta(t)$  y tiempo ( $t$ ) conduce a la obtención de la velocidad angular de la partícula. Lo anterior significa que la elección del punto de referencia angular no tiene importancia ya que lo que tiene significado es la *diferencia* de la magnitud considerada que en este caso es el desplazamiento angular ( $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ) durante un intervalo de tiempo y no su valor absoluto en un punto dado del plano, lo cual permite hacer uso de la idea gauge. Este análisis permite caracterizar el papel que juega el concepto gauge en la formalización del movimiento de la partícula en rotación dando la posibilidad de mostrar una mirada diferente a la usual en el abordaje y explicación de éste.

### 3.2. La velocidad instantánea mirada bajo este concepto

Se realiza un análisis sobre el movimiento de una partícula en caída libre haciendo uso del concepto gauge en la recalibración del tiempo y la recalibración de la posición de la partícula que cae, con el fin de obtener la velocidad de la partícula en un instante de tiempo, es decir, a los cuatro segundos de iniciada la caída. La figura 2 muestra el lugar geométrico del movimiento de la partícula que cae



**Figura 2.** Diferentes posiciones de una partícula en caída libre, asumiendo la aceleración de la gravedad igual  $a(t) = 10m/s^2$  Fuente: elaboración propia.

La ecuación de movimiento para la partícula en caída libre se plantea de la siguiente forma:

$$y = 5t^2. \tag{6}$$

Para hallar la velocidad de la partícula al cabo de cuatro segundos es necesario conocer la distancia que recorre en un tiempo muy pequeño para evitar cambios en la velocidad. Esto significa que la relación entre el desplazamiento y el tiempo transcurrido se debe aproximar a un valor límite definido. Como se aprecia en la tabla 1, a medida que el tiempo tiende a cuatro segundos la posición de la partícula tiende a 80 metros, y la velocidad tiende a 40 m/s, en tanto que los intervalos de tiempo y posición se hacen extremadamente pequeños.

$t(seg)$	$y(t)m$	$\Delta t(seg)$	$\Delta y(m)$	$v(t)m/s$
3,8	72,2	0,1	3,85	38,5
3,9	76,05	0,09	3,5505	39,45
3,99	79,6005	$9 \times 10^{-3}$	0,359505	39,945
3,999	79,9600	$9 \times 10^{-4}$	0,035995	39,9945

**Tabla 1.** Se muestran las diferentes tendencias del tiempo, la posición, intervalo de tiempo e intervalo de posición y tendencia de la velocidad de la partícula.

Fuente: elaboración propia.

Dada la tendencia de los valores del tiempo y los valores de la posición, además de los intervalos de tiempo e intervalos de posición, dados por la tabla 1, la velocidad de la partícula al cabo de cuatro segundos puede ser calculada en el instante de tiempo,  $t \rightarrow t' = t + \Delta t$  el cual la posición de la partícula queda dada por  $y \rightarrow y' = y + \Delta y$  En otras palabras, considerando el tiempo y la posición como una recalibración dadas por,

$$t \rightarrow t' = t + \Delta t ; y \rightarrow y' = y + \Delta y, \tag{7}$$

se obtiene la posición de la partícula un poco más lejos de lo que se encontraba antes  $y = 5t^2$ s decir,

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= 5(t + \Delta t)^2, \\ 5t^2 + \Delta y &= 5t^2 + 10t\Delta t + 5\Delta t^2. \end{aligned}$$

En primera aproximación la velocidad de la partícula será:

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = 10t + 5\Delta t.$$

Sin embargo, la velocidad de la partícula a los cuatro segundos es el valor límite de  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  decir, tanto  $\Delta y$  como  $\Delta t$  se hacen infinitamente pequeños como lo muestra la tabla 1,

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 10t + 5\Delta t = 10t. \tag{8}$$

Por lo tanto, a los cuatro segundos la velocidad instantánea de la partícula será  $v(4) = 40m/s$ . Bajo este contexto, la velocidad de la partícula al cabo de los cuatro segundos se obtuvo haciendo uso de (7) que corresponde a una transformación gauge de la variable

de tiempo y la variable de posición de la partícula. De la misma forma que el concepto de partícula es un concepto físico que permite describir el movimiento del cuerpo apoyándose en el concepto de punto, la velocidad instantánea de la partícula puede ser obtenida haciendo uso del concepto gauge apoyándose en la recalibración de las variables de posición y tiempo como valor agregado para el análisis. Este mismo resultado puede ser obtenido derivando la función  $y(t) = 5t^2$  respecto al tiempo y calculando la velocidad a los cuatro segundos. Finalmente, el análisis puede ser generalizado para obtener la derivada de cualquier función como una recalibración de las variables dependiente e independiente.

### 3.3. Caso electrostático

La anterior idea puede ser implementada en el caso particular de la electrostática haciendo uso del potencial eléctrico. El potencial eléctrico en dos puntos en un espacio de tres dimensiones queda determinado mediante las coordenadas  $V_0 = V_0(x_1, y_1, z_1)$  y  $V_f = V_f(x_2, y_2, z_2)$ , respectivamente, los cuales pueden ser recalibrados adicionando una constante arbitraria de la siguiente forma:

$$V_0 \rightarrow V_0' = V_0(x_1, y_1, z_1) + cte; \quad V_f \rightarrow V_f' = V_f(x_2, y_2, z_2) + cte. \quad (9)$$

Lo anterior significa que el potencial inicial y final no están unívocamente determinados. La medición del potencial en cada punto del espacio puede ser arbitraria respecto a cada observador. Por lo tanto, a una misma diferencia de potencial  $\Delta V = V_f - V_0$  pueden corresponder diferentes potenciales, inicial y final, dependiendo de la constante arbitraria que se adicione. Es fácil de comprobar que la diferencia de potencial ( $\Delta V$ ) no cambia al sustituir la transformación (9), lo cual significa, que es la diferencia de potencial lo que tiene significado físico. Esta invariancia es denominada invariancia gauge global ya que la constante que se adiciona es igual para todos los observadores.

Existe otra manera de realizar la recalibración del potencial eléctrico. En este caso, cada observador puede adicionar una constante diferente quedando la diferencia de potencial ( $\Delta V = V_f - V_0$ ) invariante bajo una transformación local de la forma,

$$(10)$$

$$V_{01} \rightarrow V_{01}' = V_{01}(x_1, y_1, z_1) + C_1; \quad V_{f1} \rightarrow V_{f1}' = V_{f1}(x_2, y_2, z_2) + C_1$$

ó

$$V_{02} \rightarrow V_{02}'' = V_{02}(x_1, y_1, z_1) + C_2; \quad V_{f2} \rightarrow V_{f2}'' = V_{f2}(x_2, y_2, z_2) + C_2$$

ó

$$V_{03} \rightarrow V_{03}''' = V_{03}(x_1, y_1, z_1) + C_3; \quad V_{f3} \rightarrow V_{f3}''' = V_{f3}(x_2, y_2, z_2) + C_3.$$

El efecto de adicionar una constante arbitraria por cada observador de referencia no modifica en nada las ecuaciones de la electrostática. Esto significa que la elección sobre el valor absoluto del potencial en un punto dado del espacio no tiene importancia ya que siempre se tratará con diferencias del potencial eléctrico. No obstante, esto permite apreciar la implementación del concepto gauge, global y local, dentro del esquema electrostático. Finalmente, la anterior idea es implementada dentro del contexto de la electrodinámica clásica, la mecánica cuántica y en electrodinámica cuántica mostrando la manera de proceder desde cada esquema.

### 4. Invariancia gauge en electrodinámica clásica

Las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos son las denominadas ecuaciones de Maxwell [8]. Para mostrar en detalle la invariancia gauge que exhiben las ecuaciones de Maxwell es necesario reescribir los campos eléctrico y magnético introduciendo el potencial escalar ( $\phi$ ) y el potencial vectorial ( $\mathbf{A}$ ) como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (11)$$

La especificación de cualquier campo se hace definiendo tanto su rotacional como su divergencia, además de considerar que el campo debe aproximarse a cero lejos de las fuentes [9]. Por lo tanto, el potencial vectorial ( $\mathbf{A}$ ) queda especificado por el rotacional  $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , imponiendo la condición para su divergencia  $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ , la cual es denominada gauge de Lorentz ( $\partial_\mu A^\mu = 0$ ). Además, los potenciales electromagnéticos  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(r, t)$ ;  $\phi = \phi(r, t)$  no están unívocamente determinados ya que estos pueden ser escritos como:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial_i \chi(r, t); \quad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \partial_0 \chi(r, t),$$

ó en forma cuadri-vectorial,

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(r^\mu), \quad (12)$$

siendo  $\chi = \chi(r^\mu)$  una función escalar continua [9]. Es evidente que los campos eléctrico y magnético son invariantes bajo la transformación gauge local del cuadri-potencial (12), es decir, cada observador puede estar ubicado en diferentes puntos del espacio-tiempo ( $r \rightarrow r' = r + cte, t \rightarrow t' + cte$ ) y obtener los mismos campos, lo que significa hacer uso de la recalibración para los potenciales.

El principio gauge local que se formula es referido a la dependencia de los potenciales de las coordenadas, y la transformación gauge local permite pasar de una ubicación en el sistema de coordenadas a otra. Por lo tanto, el poder cambiar la ubicación de un punto a otro en el sistema de coordenadas significa que existe una invariancia gauge de las ecuaciones. En general, la transformación gauge hará que un problema sea más

fácil de resolver siempre y cuando la transformación produzca un resultado que sea físicamente significativo. En este sentido, la simetría gauge trae como consecuencia la conservación de la carga eléctrica.

El hecho de que existan infinitos potenciales asociados al campo eléctrico y al campo magnético proviene de la simetría gauge, lo cual significa que las ecuaciones de Maxwell, además de la invariancia del grupo de Lorentz que deben cumplir, también son invariantes bajo el grupo de transformación  $U(1)$ .

$$U = e^{i\theta(r^\mu)}, \quad \in U(1) \quad (13)$$

siendo  $\theta = \theta(r^\mu)$  un parámetro continuo e infinitesimal. El cuadri-potencial (12) se puede reescribir como:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = UA^\mu U^{-1} - \frac{1}{q}(\partial^\mu U)U^{-1}. \quad (14)$$

Considerando la fase  $U = e^{i\theta}$  una constante y realizando la expansión  $U = e^{i\theta} \approx 1 + i\theta$  se cumple que  $A'^\mu = A^\mu$ , lo que significa una invariancia global del cuadri-potencial, y por lo tanto, de las ecuaciones de Maxwell. Por otra parte, si  $\theta = \theta(r^\mu)$  tiene una dependencia espacio-temporal el grupo se convierte en local. Realizando la expansión  $U = e^{i\theta(r^\mu)} \approx 1 + i\theta(r^\mu) + O(\theta^2)$ , y  $U^{-1} = e^{-i\theta(r^\mu)} \approx 1 - i\theta(r^\mu) + O(\theta^2)$  se obtiene que el cuadri-potencial transforma como:  $A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{q}\partial^\mu\theta(r^\mu)$ . Comparando la anterior expresión con (12) se tiene que  $\chi(r^\mu)$ . Lo anterior evidencia que haciendo uso del grupo  $U(1)$ , las ecuaciones de Maxwell quedan invariantes bajo una simetría gauge global  $U = e^{i\theta}$  y cuando ésta se torna local  $U = e^{i\theta(r^\mu)}$ .

Por otra parte, el lagrangiano electromagnético invariante de Lorentz e invariante gauge local que da lugar a las ecuaciones de Maxwell es:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu, \quad (15)$$

siendo,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  el tensor electromagnético y  $J_\mu$  la cuadri-corriente. El lagrangiano anterior puede ser expresado en términos del cuadri-potencial  $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu\partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu$  de forma tal que es invariante gauge en los potenciales. Desde el punto de vista de covariancia el cuadri-potencial es la variable esencial ya que (12) deja invariante a  $F^{\mu\nu}$ . Esto significa que para un mismo tensor electromagnético existen infinitas maneras de recalibrar el cuadri-potencial. El último término del lagrangiano corresponde a la interacción del cuadri-potencial con una corriente, es decir, la densidad de energía de interacción viene dada por el término  $(J_\mu A^\mu)$ .

Los campos físicos (B, E) quedan definidos a través del tensor electromagnético que es invariante bajo la transformación (12), y por lo tanto, la dinámica se encuentra relacionada con el requerimiento de la invariancia gauge local. En otras palabras, la magnitud física fundamental  $F^{\mu\nu}$  queda invariante bajo la transformación del cuadri-potencial, y es en este sentido

que se puede sugerir a los potenciales, como las magnitudes fundamentales siendo los campos (B, E) obtenidos de ellos por simple diferenciación, es decir, se obtiene la misma física bajo la transformación (12).

En general, los potenciales deben, en ciertos casos, considerarse físicamente efectivos, incluso cuando no haya un campo magnético actuando sobre una partícula cargada como lo establece Feynmann en sus lecturas de Física, "...Pero la definición de campo "real" que propusimos originalmente estaba basada sobre la idea de que un campo "real" no puede actuar a distancia sobre una partícula" [10]. Y en otro aparte establece "...el campo es "real" si es lo que se debe especificar en la posición de la partícula para obtener el movimiento. El campo B en las agujas actúa a distancia. Si deseamos describir su influencia no como una acción a distancia, debemos usar el potencial vectorial" [10]. Otros autores [11-14] tienen igual postura en relación al potencial vectorial y en particular Konpinski establece que "...The effort here will be to show that A has always had a more explicit physical meaning, and direct measurability, already in "classical" situations" [15].

La discusión anterior sugiere darle una mayor importancia al cuadri-potencial dotándolo de un estatus de campo físico, ya que al formular una teoría electromagnética local conduce a considerar que, por ejemplo, un electrón interactúa vía campo gauge y no necesariamente a distancia a través de un campo magnético. En otras palabras, se sugiere considerar a como una variable física, lo cual significa que, cuando una simetría gauge global se torna local, se requiere de la existencia de un campo gauge ( $A^\mu$ ) que interactúa de una forma específica.

Por otra parte, a partir del lagrangiano electromagnético y haciendo uso de las ecuaciones Euler-Lagrange, se obtienen las ecuaciones de Maxwell con fuentes en su forma covariante,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = J^\mu,$$

o en ausencia de fuentes,

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\mu = 0,$$

cuando el lagrangiano electromagnético queda expresado por,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (16)$$

Una consecuencia evidente alrededor de esta formulación es la ecuación de continuidad,  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , lo cual significa que la invariancia gauge del lagrangiano asegura la conservación de la carga. Cabe resaltar que en el lagrangiano (15) no se introducen términos de masa ya que la partícula asociada al campo electromagnético, el fotón, no tiene masa, y por lo tanto, el campo electromagnético, que satisface la ecuación de onda, describe un fenómeno de propagación de largo alcance. No obstante, se puede generalizar el lagrangiano (15) para describir campos vectoriales masivos como [16],

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu + J_\mu A^\mu, \quad (17)$$

donde el primer término es denominado, término cinético en el que incluye sólo derivadas del cuadri-potencial. El segundo término corresponde al término de masa, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. El lagrangiano (17) da lugar a la ecuación de Proca  $\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu$  que describe partículas con masa y espín uno como por ejemplo los bosones intermediarios de la interacción débil ( $W^\pm$ ), los cuales juegan un rol importante para la explicación de las interacciones a nivel nuclear.

Proponer un lagrangiano para las interacciones sin términos de masa, implica obtener en general bosones intermediarios sin masa, lo cual corresponde sólo al caso electromagnético y no al caso general. Por otro lado, introducir términos de masa en el lagrangiano implica que la simetría gauge propuesta se rompa explícitamente, es decir, el lagrangiano (17) no es invariante bajo la transformación del cuadri-potencial (12). Por lo tanto, esta manera de proceder no permite hacer una generalización teórica en torno a la interacción entre partículas, lo cual implica hacer un replanteamiento sobre el modelo propuesto que permita obtener una explicación en consonancia con la fenomenología observada.

### 5. Invariancia gauge en mecánica cuántica

Surge la motivación de obtener la invariancia gauge, global y local, del lagrangiano de una partícula cargada de espín  $\frac{1}{2}$  descrita por la función  $(\psi)$  en presencia de un campo electromagnético exigiendo la simetría

El lagrangiano propuesto es,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} (\mathbf{D}\psi)^* \cdot (\mathbf{D}\psi) - \frac{i}{2} (\psi^* \mathbf{D}^0 \psi - (\mathbf{D}^0 \psi)^* \psi). \quad (18)$$

Haciendo uso de las ecuaciones Euler-Lagrange, se obtiene la ecuación de Schrödinger,

siendo,  $\mathbf{D} = \partial_i - iq\mathbf{A}$  y  $\mathbf{D}_0 = \partial_0 + iq\phi$  ó definiendo el cuadri-vector,  $\mathbf{D}^\mu = (\mathbf{D}^0, -\mathbf{D})$ , se obtiene que  $\mathbf{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$  [17] haciendo uso de unidades naturales [18]. La ecuación (19) es invariante bajo una transformación gauge global de la función de onda,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi} \psi, \quad (20)$$

donde  $(\chi)$  es una constante [19]. Esto significa que la fase no está unívocamente determinada, y por lo tanto, existen infinitas maneras de asignarla. Sin embargo, haciendo depender la constante  $\chi = \chi(r, t)$  de las coordenadas y el tiempo, la ecuación de Schrödinger deja de ser invariante bajo la transformación local de la fase,

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi(r^\mu)} \psi, \quad (21)$$

lo cual sugiere que el campo  $\psi$  no describe la misma física que el campo  $\psi'$ . No obstante, haciendo uso de la transformación gauge del cuadri-potencial (12) se

recobra la invariancia de la ecuación de Schrödinger asegurando que los campos  $(\psi)$  y  $\psi'$  describen la misma física. De lo anterior se concluye que la ecuación de Schrödinger es covariante gauge local. La simetría gauge local asociada al campo proviene de la no unicidad de la fase. Multiplicar por ésta el campo  $(\psi)$  significa realizar una rotación en el sistema de coordenadas, y por lo tanto, un cambio en el sistema de referencia permaneciendo invariante la carga eléctrica, es decir, el campo  $(\psi)$  permanece invariante bajo el sistema de referencia que se adopte en cada punto del espacio-tiempo, quedando la carga eléctrica invariante ya que es definida en cada punto del espacio-tiempo.  $(\psi)$  Se puede concluir que la forma del acoplamiento, entre el campo electromagnético ( $A_\mu$ ) y el campo cargado  $(\psi)$  está explícitamente dada a través de la derivada covariante ( $\mathbf{D}^\mu$ ) y no depende de la transformación local de la fase (21). Lo cual sugiere que para asegurar la invariancia gauge local de la interacción de la partícula cargada con el campo electromagnético, la derivada común debe ser remplazada por la derivada covariante  $\mathbf{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ , en tanto que el cuadri-potencial debe transformar de acuerdo con (12).

Es importante señalar que la derivada  $\partial^\mu + iqA^\mu$  es interpretada como la prescripción para introducir el campo gauge  $(A_\mu)$  de la teoría electromagnética en mecánica cuántica y así lograr la covariancia gauge de la teoría. Se evidencia, además, que la transformación gauge local (21) para el campo  $(\psi)$  asegura la invariancia del campo de materia  $(\psi = \psi')$  en mecánica cuántica, de la misma forma que, la transformación gauge local del cuadri-potencial (12) para los campos eléctrico y magnético, asegura la invariancia de las ecuaciones de Maxwell en electrodinámica clásica. No obstante, la dinámica de interacción entre el campo cargado y el campo gauge no se obtiene bajo este contexto, sólo se evidencia la invariancia de las ecuaciones de movimiento y la invariancia del campo de materia.

### 6. Lagrangiano de Dirac

La dinámica de interacción entre el campo electromagnético  $A_\mu$  y el campo de materia  $\psi$  se obtiene de imponer el principio gauge local, bajo la simetría abeliana  $U(1)$  al lagrangiano para una partícula cargada libre con espín  $\frac{1}{2}$  descrita por la función  $\psi(r^\mu)$  y en presencia de un campo electromagnético  $(A_\mu)$  denominado lagrangiano de Dirac [18, 20].

$$\mathcal{E} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (22)$$

siendo,  $\bar{\psi}(r^\mu) \equiv \psi^+(r^\mu)\gamma^0$ ,  $\psi(r^\mu)$  un espinor de cuatro componentes una matriz  $4 \times 4$ . Por lo tanto, exigiendo la invariancia del lagrangiano bajo una transformación gauge local se especifica la forma de la interacción entre el bosón gauge  $(A_\mu)$  y el campo de materia  $\psi(r^\mu)$ .

El lagrangiano de Dirac es invariante bajo una transformación gauge global de la función de onda  $\psi^{(r^\mu)}$ ,

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iq\chi}, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi, \quad (23)$$

siendo  $(\chi)$  un parámetro constante. La transformación  $U(\chi) = e^{iq\chi}$  dada para el campo de materia forma el grupo de simetría gauge abeliano unitario  $U = U(1)_g$  cuyo generador es la carga  $(q)$  Haciendo depender el parámetro  $(\chi)$  de las coordenadas y el tiempo  $(\chi = \chi(r^\mu))$  el lagrangiano no queda invariante bajo la transformación gauge local de la función  $\psi^{(r^\mu)}$ ,

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iq\chi(r^\mu)}, \quad \psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi(r^\mu)}\psi. \quad (24)$$

No obstante, la invariancia del lagrangiano se recupera al introducir el campo gauge  $(A_\mu)$  a través del acople minimal  $D^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu$ , y exigiendo que el bosón gauge transforme a su vez como,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \chi(r^\mu), \quad (25)$$

logrando obtener el lagrangiano de Dirac con el término de interacción entre el campo gauge y el campo de materia como se pretendía,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi. \quad (26)$$

El término  $(q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)$  establece la interacción entre el campo electromagnético y el campo de materia dado que,  $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  es la quadri-corriente y  $(q)$  la constante de acoplamiento con el campo  $A_\mu$ . La invariancia del lagrangiano de Dirac bajo el grupo de simetría local gauge  $U = U(1)_g$ , trae como consecuencia la obtención de un término de interacción entre el campo gauge  $A_\mu$  y el campo de materia  $(\psi)$  lo cual significa que la invariancia del lagrangiano bajo  $U = U(1)_g$  implica obtener la dinámica del sistema; dinámica que surge de una forma natural.

Por lo tanto, el lagrangiano de Dirac invariante gauge local se escribe como:

$$\mathcal{E}_D = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi.$$

La propagación del campo  $(A_\mu)$  se describe a través del término cinético,  $\mathcal{E} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ , siendo,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  el tensor campo electromagnético. Por lo tanto, el lagrangiano de la electrodinámica cuántica (QED) invariante de Lorentz queda escrito como:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_D + \mathcal{E}_E + \mathcal{E}_I, \quad (27)$$

donde  $(\mathcal{E}_D)$  es el lagrangiano de Dirac,  $(\mathcal{E}_E)$  el lagrangiano electromagnético y  $(\mathcal{E}_I)$  el lagrangiano de interacción. De lo anterior se concluye que haciendo uso de la simetría gauge local  $U = U(1)_g$  y exigiendo que el lagrangiano sea invariante bajo ésta, se obtiene explícitamente la dinámica de la interacción entre el campo de materia y el campo gauge.

Finalmente, Yang y Mills [4] generalizan esta manera de proceder haciendo uso del grupo de simetría no abelianos  $SU(2)$ , de matrices complejas  $2 \times 2$  unitarias con determinante unidad, con el fin de obtener una explicación sobre la interacción del campo gauge  $(\mathcal{E}_a)$  con el campo de materia  $(\psi)$  resaltando el uso de la simetría gauge local asociada al grupo  $SU(2)$  [21], 1999).

Introducen la conservación del isoespín con el objetivo de considerar al protón y neutrón como dos estados de una partícula denominada nucleón [4]. Este análisis evidencia cómo el esquema de la electrodinámica clásica se convierte en un paradigma para la construcción de una explicación alrededor de la interacción nuclear y a la vez propicia una ruta de trabajo para la unificación de las interacciones conocidas hasta el momento.

## 7. Lagrangiano de Yang-Mills

Heisenberg en 1932 introduce el concepto de isoespín con el fin de hacer una descripción del núcleo considerando al neutrón y protón como dos estados de una misma partícula denominada nucleón, asumiendo, además, sus masas aproximadamente iguales y atribuyendo a cada estado una orientación posible en el espacio del isoespín [22].

La orientación relativa en el espacio del isoespín es lo que distingue el estado del nucleón, es decir, las diferentes orientaciones del nucleón en el espacio de isoespín indica si el nucleón se encuentra en el estado de protón o si se encuentra en el estado de neutrón, con lo cual se plantea que todos los procesos físicos de interacción asociados al protón y al neutrón deben ser invariantes bajo cualquier rotación de los campos relacionados al protón y al neutrón en el espacio del isoespín. En otras palabras, la interacción debe ser invariante bajo una transformación gauge del espinor,  $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$ , lo que significa la conservación del isoespín por un cambio en la fase de la función  $(\psi)$  que representa a la partícula.

Yang-Mills siguiendo la misma estrategia metodológica de la electrodinámica clásica e implementando la invariancia de la interacción bajo una simetría gauge local del espinor  $(\psi)$  [4], generalizan la simetría gauge local abeliana  $U = U(1)_Q$  a la simetría gauge local no abeliana  $SU(2)$  y proponen para el sistema de partículas, protón y neutrón, el lagrangiano,

$$\mathcal{E} = \bar{p} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)p + \bar{n} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)n. \quad (28)$$

El sistema, nucleón, se representa por medio de una matriz columna (espinor) de dos componentes con isoespín  $1/2$ ,

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad (29)$$

quedando el lagrangiano escrito como,

$$\mathcal{E} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (30)$$

Es de notar que el anterior lagrangiano es invariante bajo la transformación gauge global del espinor,

$$\bar{\psi} \xrightarrow{G} \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iL \cdot \alpha}, \quad \psi \xrightarrow{G} \psi' = e^{iL \cdot \alpha} \psi, \quad (31)$$

siendo,  $L = \frac{\tau}{2}$  y  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$  las matrices  $2 \times 2$  de Pauli que satisfacen el álgebra de conmutación  $[\frac{\tau_a}{2}, \frac{\tau_b}{2}] = i\epsilon_{abc}\tau_c$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  un parámetro independiente de las coordenadas, y la transformación  $G = e^{iL \cdot \alpha}$  satisface la

condición de unitariedad  $GG^{-1} = 1, G^{-1} = G^+ [23]$ . La transformación gauge global del espinor, representado por la flecha roja, para todos los sistemas de referencia se esquematiza en la figura 3,

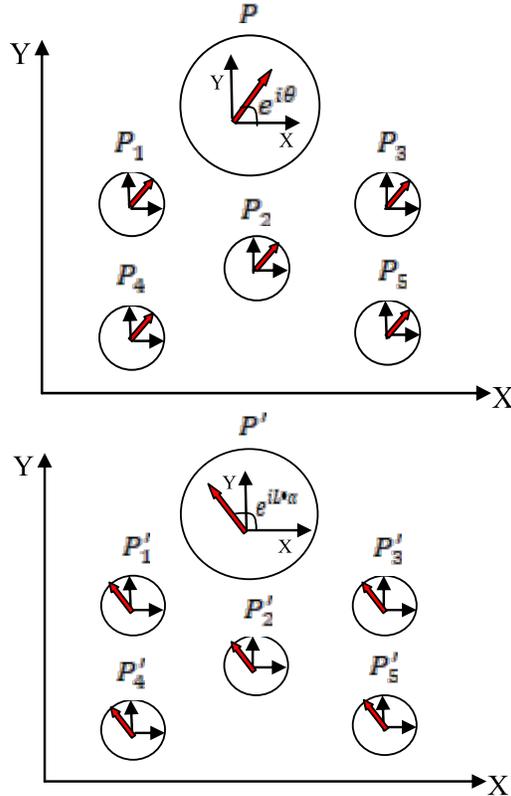


Figura 3. Recalibración global del espinor  $P \rightarrow P' = P + e^{iL\alpha}$  Fuente: elaboración propia.

Haciendo depender el parámetro ( $\alpha$ ) de las coordenadas ( $\alpha = \alpha(r^\mu)$ ) se promueve que la simetría gauge global se torne local. Lo cual exige que la interacción no sólo sea invariante bajo un cambio global sobre quien es protón o quien es neutrón sino incluso en el que la rotación de los campos asociados al protón y al neutrón depende de las coordenadas. En otras palabras, cada observador implementa una fase distinta asociada al campo de materia ( $\psi$ ) como se esquematiza en la figura 4.

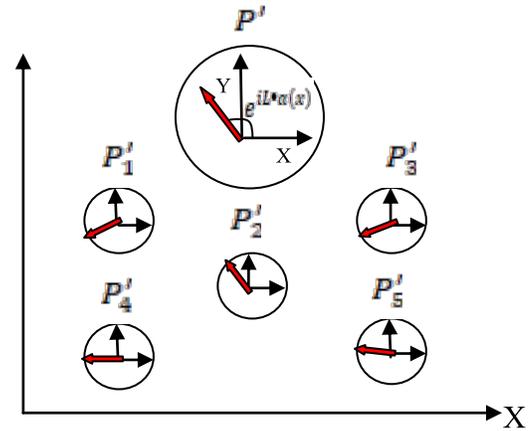
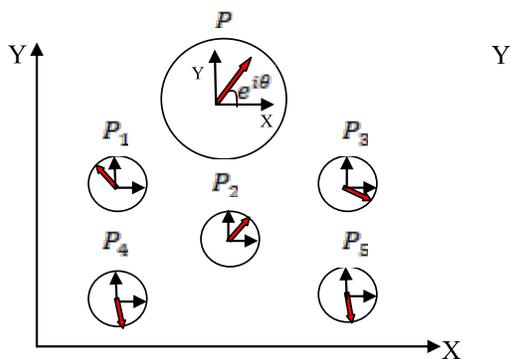


Figura 4. Recalibración local del espinor respecto a diferentes observadores. Fuente: elaboración propia.

Por lo tanto, al lagrangiano se le exige la invariancia bajo la transformación gauge local de la función  $\psi(r^\mu)$ ,

$$\bar{\psi} \xrightarrow{G(r^\mu)} \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iL\alpha(r^\mu)}; \psi \xrightarrow{G(r^\mu)} \psi' = e^{iL\alpha(r^\mu)} \psi. \quad (32)$$

Para asegurar la invariancia gauge local del lagrangiano se requiere la introducción del campo gauge ( $B_\mu$ ) a través del acople minimal  $D^\mu = \partial^\mu + igB^\mu$ , siendo ( $g$ ) la constante de acoplamiento de interacción, como ( $q$ ) lo es para el caso de la QED. El campo ( $B_\mu$ ) es quien media la interacción entre los campos asociados al protón y al neutrón. Además, la invariancia requiere que la derivada covariante transforme como:

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = G D_\mu \psi, \quad (33)$$

obteniendo la ley de transformación de la derivada,  $D'_\mu = G D_\mu G^{-1}$ . A partir de ésta se obtiene la ley de transformación del campo gauge ( $B_\mu$ ),

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = G B_\mu G^{-1} - \frac{1}{g} (\partial_\mu G) G^{-1}, \quad (34)$$

teniendo la misma forma de transformación a la del campo  $A_\mu$  en electrodinámica [4] como se evidencia en (14). La invariancia gauge local al lagrangiano,

$$\mathcal{E} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi, \quad (35)$$

trae como consecuencia la obtención del lagrangiano libre más un término de interacción entre el campo y el campo de materia.,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - g \bar{\psi} \gamma^\mu B_\mu \psi. \quad (36)$$

El término  $(g \bar{\psi} \gamma^\mu B_\mu \psi)$  establece la interacción entre el campo ( $B_\mu$ ) y el campo  $\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  dado que,  $J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$  es la cuadr corriente de isoespín y ( $g$ ) la constante de acoplamiento con el campo ( $B_\mu$ )

El tensor campo electromagnético para el grupo  $SU(2)$  se define como:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{iq} [D_\nu, D_\mu] = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + iq [B_\nu, B_\mu], \quad (37)$$

siendo el conmutador ( $[B_\nu, B_\mu] = 0$ ) igual a cero para el caso de la electrodinámica clásica, obteniéndose la definición usualmente establecida  $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ . El tensor campo electromagnético para  $SU(2)$   $F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + iq [B_\nu, B_\mu]$ , transforma de igual manera a como transforma el campo

( $B_\mu$ ) asegurando la simetría gauge local,

$$F'_{\mu\nu} = GF_{\mu\nu}G^{-1}. \tag{38}$$

La no abelianidad de la teoría se debe a la no conmutatividad de los campos gauge ( $B_\mu = B_\mu^1, B_\mu^2, B_\mu^3$ ), ( $[B_\mu^i, B_\mu^j] \neq 0$ ) en tanto, la simetría gauge local corresponde a la transformación del campo ( $\psi$ ) dada por (32). De lo anterior se desprende el rimbombante nombre dado a esta explicación, teoría gauge no abeliana con simetría local. El grupo de simetría propuesto  $SU(2)$  reúne todos los ingredientes para obtener la interacción entre el campo gauge y el campo de materia. Bajo el modelo de Yang-Mills la interacción entre nucleones se da a partir de la existencia del campo gauge ( $B_\mu$ ) cuyo quantum posee tres estados de carga a diferencia del caso electromagnético [4].

Finalmente, el lagrangiano de Yang-Mills invariante bajo una simetría gauge local queda escrito como:

$$\mathcal{E}_{Y-M} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_I + \mathcal{E}_{gauge}, \tag{39}$$

siendo  $\mathcal{E}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$ , agrangiano libre,  $\mathcal{E}_I = -g\bar{\psi}\gamma^\mu B_\mu\psi$  el lagrangiano de interacción y  $\mathcal{E}_{gauge} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2$ , el lagrangiano de propagación del campo ( $B_\mu$ ) Como en el caso de la electrodinámica clásica, los campos gauge permanecen sin masa, lo cual es una característica del modelo propuesto.

En general, las anteriores ideas se pueden extender a cualquier campo de materia con isoespín arbitrario. Además, para campos de materia diferentes, pero con el mismo isoespín, la interacción es de la misma forma que la descrita con el campo ( $B_\mu$ ) análogo a la forma de interacción del campo ( $A_\mu$ ) con el campo ( $\psi$ ) independientemente de su naturaleza. En la literatura se

encuentra que la interacción débil es mediada por bosones gauge con masa y carga ( $W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0$ ) contradiciendo las predicciones teóricas del modelo propuesto por Yang-Mills y surgiendo la pregunta en relación a la simetría que puede dar lugar a la aparición de dichos bosones gauge.

Aunque la teoría de Yang-Mills fracasa en su intento por describir la interacción entre protones y neutrones, sirvió como modelo para el establecimiento de una nueva formulación dada por los pensadores Glashow, Salam y Weinberg sobre la interacción nuclear. Bajo este contexto, la interacción nuclear, de corto alcance, se logra introduciendo un mecanismo basado en un campo auxiliar (campo de Higgs) que genera la masa para los campos intermediarios gauge.

Finalmente, la metodología propuesta brinda la oportunidad de plantear la enseñanza del concepto de invariancia gauge, global y local, de manera que contribuya a su aprendizaje ya éste resulta generalmente abstracto a los estudiantes, lo que permite conectar el mismo dentro de diferentes esquemas de la física. Esto constituye una forma novedosa, didáctica y robusta para abordar el tema además de familiarizar más rápidamente a los estudiantes con el formalismo de la física contemporánea, y particularmente se muestra una manera de aproximar a los estudiantes al esquema conceptual que demanda la física de partículas. Por último, en la tabla 2 se muestra un cuadro comparativo sobre la implementación del concepto de invariancia gauge, global y local, desde los diferentes esquemas abordados.

	Invariancia global	Invariancia local
<b>Contexto clásico</b>	$t \rightarrow t' = t + cte$ $\theta \rightarrow \theta' = \theta + cte$	$t \rightarrow t' = t + \Delta t$ $\theta \rightarrow \theta' = \theta + \Delta\theta$
<b>Electrostática</b>	$V_0 \rightarrow V_0' = V_0 + cte$ $V_f \rightarrow V_f' = V_f + cte$	$V_0 \rightarrow V_0' = V_0 + C_1(\mathbf{r})$ $V_f \rightarrow V_f' = V_f + C_1(\mathbf{r})$
<b>Electrodinámica clásica</b>	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + cte$ $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - cte$	$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \partial_i\chi(r, t)$ $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \partial_0\chi(r, t)$
<b>Mecánica cuántica</b>	$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi$	$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi(r^\mu)}\psi$
<b>Electrodinámica cuántica</b>	$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iq\chi}$ $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi}\psi$	$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iq\chi(r^\mu)}$ $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\chi(r^\mu)}\psi$
<b>Modelo de Yang – Mills</b>	$\bar{\psi} \xrightarrow{G} \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iL\bullet\alpha}$ $\psi \xrightarrow{G} \psi' = e^{iL\bullet\alpha}\psi$	$\bar{\psi} \xrightarrow{G(x)} \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-iL\bullet\alpha(x)}$ $\psi \xrightarrow{G(x)} \psi' = e^{iL\bullet\alpha(x)}\psi$

**Tabla 2.** Cuadro comparativo sobre la implementación del concepto de invariancia gauge, global y local.

Fuente: elaboración propia.

## Agradecimientos

Este escrito ha sido realizado con el apoyo de la Universidad Pedagógica Nacional.

## Conclusiones

El esquema de la electrodinámica clásica se convierte en un paradigma para la construcción de explicaciones alrededor de los fenómenos a nivel atómico; explicación que se considera de difícil comprensión por parte de los estudiantes, lo cual da la oportunidad de generar una forma alternativa, didáctica y robusta de abordar el tema para facilitar su enseñanza-aprendizaje sobre las ideas básicas en las que se fundamenta la física de partículas.

La simetría gauge se configura como una manera de construir esquemas teóricos alrededor de las interacciones de la naturaleza, lo que permitió una comprensión sobre la estructura de la materia.

En las últimas décadas se han propuesto metodologías y estrategias para la enseñanza de la física contemporánea. Esto se debe a que ha generado una revolución cognitiva en la medida que da una nueva visión del mundo. Esta es una de las razones por la que se propone el escrito para ser usado como una herramienta didáctica y alternativa para introducir la teoría gauge en etapas tempranas de aprendizaje de la física, permitiendo un acercamiento más rápido por parte de los estudiantes.

El planteamiento de la estrategia metodológica permite familiarizar a los estudiantes y neófitos en general sobre el concepto de invariancia gauge, global y local, implementado para la explicación de las interacciones entre partículas. Además, proporciona una manera de abordar el tema redundando en un conocimiento con sentido y significado.

## Referencias

- [1] W. Greiner, et al. "Gauge Theory of Weak Interactions", Springer, New York, pp. 107-129, 2000. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-04211-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04211-3_4)
- [2] W. Greiner, et al. "Quantum Mechanics Symetries", Springer, New York, pp. 183-190, 1994.
- [3] H. Weyl, "Gravitation and Electricity", Ann. Phys. vol. 59, p 101, 1918.
- [4] C. N. Yang and R. L. Mills, "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". Rev. 96, p. 191, 1954. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.96.191>
- [5] H. Weyl, "Space Time Matter", New York, Dover Publications INC, pp. 282-295, 1952.
- [6] C. Quigg, "Gauge Theories of de Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions", Addison-Wesley, Canada, pp. 37-39, 1993.
- [7] M. Rozo, "Sobre la dinámica de una partícula en rotación usando el concepto de invariancia gauge", Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. vol. 40, no. 157, pp. 585 - 589 , 2016 . <https://doi.org/10.18257/raccefyn.394>
- [8] D. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", Prentice Hall, USA, pp. 321-326, 1999.
- [9] L. Landau, et al. "Teoría clásica de los Campos", Editorial Reverté S.A, pp. 61-70, 1992.
- [10] R. Feynman, "The Feynman lectures on Physics", Vol III. Addison- Wesley Publishing Company, Masachusetts, E.U.A, pp. 15-17, 1964.
- [11] Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. Phys. Rev. vol. 115, pp. 485 - 491 , 1959 . <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485>
- [12] G. Rousseaux, R. Kofman, and O. Minazzoli, "The Maxwell lodge effect: significance of electromagnetic potentials in the classical theory", Eur. J. Phys. vol. 49 , p p . 249 - 256 , 2008 . <https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00142-y>
- [13] M. Semon, and T. John, "Thoughts on the magnetic vector potential", Am. J. Phys. v o l 64 , n o . 11 , 1996 . <https://doi.org/10.1119/1.18400>
- [14] D. Lencinella, and G. Matteucci, "An introduction to the vector potential". Eur. J. Phys. vol. 25, pp. 249-256, 2004. <https://doi.org/10.1088/0143-0807/25/2/011>

- [15] E. J. Konopinski, “What the electromagnetic vector potential describes”, *Am. J. Phys.* vol. 46, no. 5, pp. 499 - 502, 1978. <https://doi.org/10.1119/1.11298>
- [16] E. S. Abers, B. W. Lee, “Gauge Theories”, *Phys Reports.* vol. 9, no. 1. pp. 1-141, 1973. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(73\)90027-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(73)90027-6)
- [17] G. Kane, “Modern Elementary Particle Physics”, Addison-Wesley, USA, pp. 35-40, 1987.
- [18] S. F. Novaes, “Standard Model: An Introduction”, ed. 27, pp. 19-22, 2000.
- [19] D. Griffiths, “Introduction to Elementary Particles”, Wiley-VCH, Germany, pp. 159-162, 2008.
- [20] T. Cheng et al. “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford, New York, pp. 78-90, 1996.
- [21] M. Guidry, “Gauge Field Theories An Introduction with Applications, John Wiley & Sons, Inc, pp. 201-206, 1999.
- [22] W. Heisenberg, “Über den Bau der Atomkerne. On the Structure of Atomic Nuclei”. *I. Z. Phys.* p. 77, 1932. <https://doi.org/10.1007/BF01342433>
- [23] A. Sokolov, et al. “Electrodinámica Cuántica”, Editorial Mir, URSS, 103-107, 1989.
- [24] M. Meenu, K.V.Solanki, V.K. Singh, “A Novel Framework to Use Association Rule Mining for classification of traffic accident severity“. *Ingeniería Solidaria*, Vol. 13, No. 21, pp. 37-24, 2014. <https://doi.org/10.16925/in.v13i21.1726>