

RECONOCIMIENTO DE FORMAS EN VISIÓN ARTIFICIAL: APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA WAVELET

SHAPE RECOGNITION IN ARTIFICIAL VISION: APPLICATION OF THE WAVELET TRANSFORM

ÓSCAR ALEXANDER BERTEL GARCÍA¹
EDWIN JOSÉ TORO BELLO²
CAMILO ANDRÉS MORENO GONZÁLEZ³

RECIBIDO: ABRIL 2009
APROBADO: JULIO 2009

RESUMEN

La transformada Wavelet es una herramienta matemática que entró en auge desde mediados de la década del 80 del siglo XX, por ser más eficiente que la clásica transformada de Fourier en el campo de la investigación en procesamiento digital de señales e imágenes. Sus aplicaciones son diversas: análisis de ruido, compresión de señales, extracción de bordes (detalles diagonales, verticales y horizontales en las imágenes digitales), características fundamentales para la óptima extracción de contornos. Este artículo analiza y describe la implementación computacional, usando modelos y procesos (signaturas y conteo de píxeles) de la visualización del grado de coincidencia de contornos en imágenes a partir de la comparación de parámetros como área, perímetro, compacidad y diámetro de los contornos. La implementación se realiza programando funciones propias para el desarrollo de la transformada Wavelet incluidas en el software Matlab 7.1®.

Palabras clave

Procesamiento digital de señales, Wavelet, DWT, visión artificial contorno, signatura.

Abstract

The Wavelet transform is a mathematical tool that is booming since the mid-80s of the twentieth century, because it is more efficient than the

-
- 1 Tecnólogo en Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación DIGITI. Correo: osbercartel2@hotmail.com
 - 2 Tecnólogo en Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación DIGITI. Correo: gatoo55@hotmail.com
 - 3 Tecnólogo en Electrónica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación DIGITI. Correo: andresdeyabu11@hotmail.com

classical Fourier transform in the field of investigation in digital signal processing and imaging. Its applications are many, among which are: Analysis of noise, signal compression, extraction of edges (details diagonals, vertical and horizontal digital images), and key features for optimal extraction of contours. This article analyzes and describes the computational implementation, using models and processes (signatures and counting pixels) of the computer visualization of the degree of coincidence of contours in images, from the comparison of parameters such as area, perimeter, compactness, and diameter contours. The implementation presented is done by programming functions for the development of the wavelet transform included in the software Matlab 7.1®.

Key words

Digital signal processing, Wavelet, DWT, contour, artificial vision, signatures.

1. INTRODUCCIÓN

El procesamiento digital de imágenes, surgido a mediados de los años 90 del siglo XX, se fortalece como técnica desde el momento en que se dispone de los recursos tecnológicos para adquirir y manipular las imágenes como matrices, caracterizadas por una gran cantidad de información, para luego ser procesadas por el computador con el objetivo de mejorar su calidad visual [1]. Para mejorar tal calidad, el primer paso es la eliminación del ruido en las imágenes captadas y/o transmitidas. En la actualidad existen diversos métodos para la extracción de ruido, pero ninguno de ellos es óptimo para todo tipo de señales, es por eso que aún se sigue experimentando y teorizando con nuevos métodos. Uno de ellos es la transformada Wavelet discreta (DWT), cuyo desarrollo teórico ha sido suficientemente estudiado, por ejemplo [5], [6]. Entre sus características prácticas se tienen:

- Permite conocer qué frecuencias componen una señal en cada instante de tiempo, a diferencia de la transformada de Fourier, que realiza una descomposición de las señales en sus componentes frecuenciales, pero sin facilitar información temporal de las mismas.
- Permite aislar y manipular distintos tipos de patrones específicos ocultos en grandes cantidades de datos.
- El análisis de Wavelet generalmente puede comprimir o eliminar ruido sin degradación apreciable.

Es importante resaltar la importancia de las transformaciones, tanto en el dominio espacial como en el de la frecuencia, ya que muchas de las operaciones de procesamiento se pueden realizar sobre la propia imagen o transformándola en un dominio alternativo, realizando allí el procesamiento para posteriormente hacer la transformación inversa con el fin de dar un manejo adecuado de la imagen. Por consiguiente, el objetivo principal de esta investigación es desarrollar e implementar un programa computacional para el reconocimiento de formas, utilizando DWT. En primer término, se describe el diseño del ambiente controlado para la adquisición de imágenes, luego se describe la adquisición y pretratamiento de la imagen y se implementa la búsqueda utilizando DWT, para finalmente describir la discriminación de los datos y determinar el grado de coincidencia entre los contornos de las imágenes.

2. METODOLOGÍA

2.1. CONSTRUCCIÓN DEL AMBIENTE CONTROLADO

La importancia de un ambiente controlado es garantizar el correcto funcionamiento del software, asegurando el cumplimiento de ciertas

condiciones de luminosidad y textura del fondo. La mejor geometría se consigue construyendo un cubo, como se ve en la Figura 1, de 33 cm de lado, cubierto interna y completamente de color negro mate, buscando la uniformidad y absorción de la luz originada a través de un chorro de 28 leds de luz blanca (5mm) –cada led consume una corriente máxima de 20 mA con un voltaje de 3 V–. Estos se disponen internamente sobre el cubo, con la condición de que el rayo de luz no se encuentre dirigido directamente a la figura o hacia la lente de la cámara, para no generar ruido en el procesamiento digital de la imagen. En cuanto a la cámara web (puesta en la parte superior interna), tiene como especificaciones: resolución de píxeles de 320 x 240, formato de datos de video de 8/16/24 bits, protocolo de comunicación USB y una relación de señal a ruido > 48db.

Cabe mencionar que, para poder obtener una mejor abstracción del contorno de la figura, esta debe resaltar notablemente sobre el fondo negro (figuras de color claro), de manera que para aumentar el tamaño de la imagen y mejorar el campo visual de la cámara se implementó una lente compuesta por una lupa puesta a 1.6 cm de la lente de la cámara web.

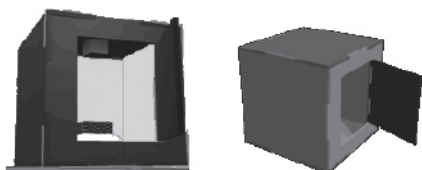


Figura 1. Diseño del ambiente controlado.

2.2. ADQUISICIÓN Y PRETRATAMIENTO DE LA IMAGEN

La imagen inicialmente es capturada por la cámara Web con una resolución de 320 X 240 píxeles en formato JPG. La imagen capturada, esta

conformada por tres matrices que corresponden a la escala de tonos: rojo, verde y azul respectivamente, conocida como RGB. Luego se realiza una unificación de las tres matrices (RGB) a una sola matriz, este proceso es denominado conversión a escala de grises de la imagen capturada (Figura 2A). Por último, se aplica un filtro de media a la imagen para resaltar el contraste de la figura con el fondo (Figura 2B).



Figura 2. Captura de imagen. A) Imagen en escala de grises; B) Imagen filtrada.

La conversión a escala de grises de la imagen y el posterior filtrado son pasos primordiales para la correcta ejecución de la transformada Wavelet discreta (DWT) y así poder obtener un óptimo contorno primario de la imagen (la DWT trabaja con una sola matriz y no con una imagen RGB, que consta de tres matrices).

2.3. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA

La DWT y su inversa permiten la reducción de ruido sobre la imagen, además de la obtención de los detalles verticales (V), horizontales (H), diagonales (D) y una aproximación (A) de la imagen. La superposición de los detalles crea un contorno primario de la figura (contorno grueso). Es importante resaltar que la DWT se divide según el tipo, grado y nivel seleccionado.

2.3.1. TIPOS, GRADO Y NIVEL DE LA WAVELET

Los tipos de Wavelet son las llamadas Wavelets madre, entre los que tenemos: Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, BiorSplines, Reverse Bior, Meyer, DMeyer, Gaussian, Mexican_hat, Morlet, Complex, Gaussian, Shannon, Frequency B-Spline y Complex Morlet. Según la Wavelet madre utilizada, se puede seleccionar el grado de la misma. Ejemplo: tipo Daubechies:

Grado: db1, db2, db3, db4, db5, db6, db7, db8, db9, db10, db**.

Donde: db1 = haar

Es importante resaltar el nivel de la DWT. Si es de nivel 1, se obtiene una sola aproximación (A1) y tres detalles (V1, H1, D1) de la imagen original; si es de nivel 2, se realiza el mismo proceso anterior pero con A1, obteniendo igualmente tres detalles (V2, H2, D2) y una nueva aproximación (A2), por consiguiente, se deduce la misma mecánica para los niveles posteriores.

2.3.2. WAVELET MADRE IMPLEMENTADA

La Wavelet madre implementada es la de Haar (a nivel 1), que equivale a una Daubechies grado 1, y aunque es la más sencilla con respecto a las demás, es la que mejor actúa con las imágenes capturadas a través de la cámara web, obteniendo (A1, V1, H1 y D1), como se observa en la Figura 3.

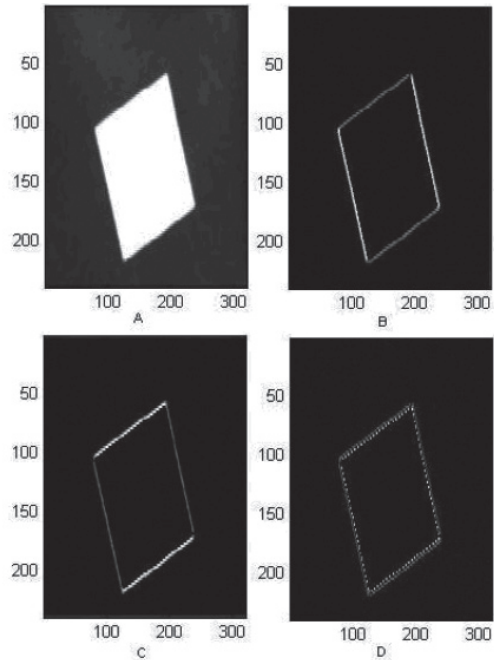


Figura 1. DWT de Haar de nivel 1: A) Aproximación 1 (A1); B) Detalles verticales (V1); C) Detalles horizontales (H1); D) Detalles diagonales (D1).

2.3.3. CONTORNO PRIMARIO

Consiste en unificar los píxeles de mayor valor (los que delimitan el contorno de la figura) de cada uno de los detalles V1, H1 y D1 en una sola matriz, la cual visualiza el contorno primario de la imagen, que es bastante grueso y está en escala de grises. (Figura 4).

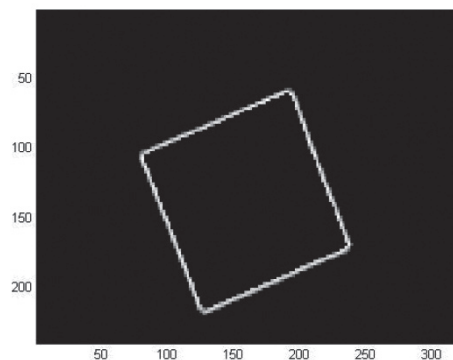


Figura 4. Contorno primario.

2.3.4. CONTORNO DE DOBLE BORDE

El contorno primario no es óptimo para la comparación o cotejo de figuras, por tener los bordes bastante toscos y gruesos. Se soluciona este inconveniente mediante algoritmos de adelgazamiento de borde para obtener el contorno doble, mostrado en la Figura 5.

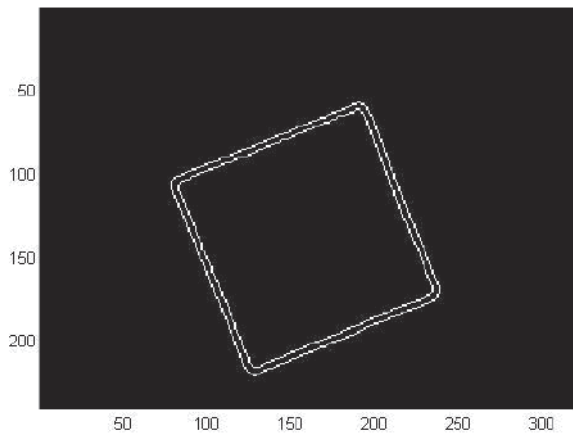


Figura 5. Doble borde.

2.3.5. EXTRACCIÓN DEL CONTORNO EXTERNO

El contorno doble (externo e interno) se forma a partir del borde grueso generado por el contorno primario. Ahora se extrae el borde externo y de esta forma se obtiene un contorno óptimo de un píxel de ancho, sin discontinuidades en el borde que delimita la figura (Figura 6). Es importante resaltar que la extracción de ruido está implícita en la aplicación de la DWT.

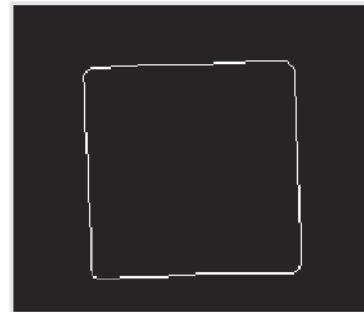


Figura 6. Extracción del contorno externo.

2.3.6. APLICACIÓN DE TÉCNICAS EN BÚSQUEDA DE PARÁMETROS QUE PERMITAN EL COTEJO DE CONTORNOS

El borde externo es el contorno final y se analiza para obtener distintos parámetros (área, perímetro, etc.) que permitan comparar o discriminar la forma de una figura con otra. Para obtener estos parámetros tenemos la técnica de firmas y el conteo de píxeles.

2.4. SIGNATURA

En síntesis, se han utilizado dos métodos para obtener estos parámetros de comparación, el primero de los cuales, a través de firmas, consiste en una representación de un contorno mediante una función real unidimensional que sea más sencilla que la función bidimensional que define el contorno. Hay varias maneras de definir una firma. Una de las más simples es a través de la distancia desde un punto interior, como puede ser el centroide del contorno, a cada uno de los puntos del mismo como una función del ángulo [2] (Figura 7).

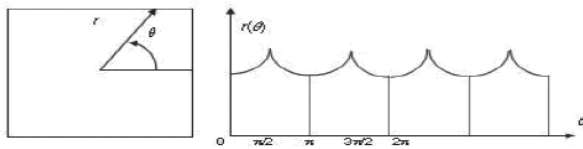


Figura 7. Función del ángulo de un cuadrado.

Sin embargo, el método de firmas debe cumplir ciertas condiciones con respecto a las transformaciones geométricas básicas: translación, rotación y escala (TRS) (*translation, rotation and scale*) con el fin de utilizarlo en el análisis de formas. Las características son:

- Invarianza ante traslaciones, que impone que la correlación entre el modelo y el objeto de la imagen ha de ser independiente de la posición que este último ocupe.
- Tampoco debe influir si el objeto sufre algún giro, definiéndose así la invarianza ante rotaciones.
- Finalmente, es importante la invarianza ante cambios de escala, es decir, según cuán cerca o cuán lejos esté el objeto de la cámara. Cuando algún parámetro cumple estas tres propiedades se dice que posee invarianza TRS.

2.4.1. PROPIEDADES DEL MÉTODO DE SIGNATURA

- Es invariante a la translación, donde X +v es X trasladado por un vector V:

$$r_{x+v}(\varphi) = r_x(\varphi) \tag{1}$$

- Depende del cambio del tamaño de la figura. donde λX es la figura X aumentada un factor λ :

$$X : r_{\lambda X}(\varphi) = \lambda r_X(\varphi) \tag{2}$$

- No depende de la orientación de la figura X, donde Y es la figura X rotada un ángulo:

$$X : r_X(\varphi) = r_Y(\varphi - \alpha) \tag{3}$$

- No es invariante a la reflexión.
- Es periódica con un período:

$$2\pi : r_X(\varphi + 2\pi) = r_X(\varphi) \tag{4}$$

2.4.2. DESVENTAJAS DEL MÉTODO DE SIGNATURA

Para aplicar el método de firmas se deben cumplir dos condiciones: que el centro geométrico del contorno se encuentre dentro de este y que la figura no tenga curvas muy cerradas (Figura 8), lo cual nos condiciona el tipo de contornos para cotejar [7].

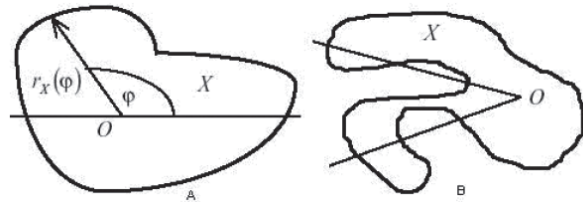


Figura 8. Desventajas de las firmas.

2.4.3. CONTEO DE PÍXELES

Para suplir las falencias del método de firmas, se aplicó un nuevo método que consiste en el conteo de los píxeles referentes al contorno, obteniendo el perímetro (como la suma de los píxeles que conforman el borde), y el área (suma de todos los píxeles que conforman la región interna del contorno), por tanto durante el análisis, no se tienen restricciones en el tipo de figura.

2.4.4. INVARIANZA TRS

La función del ángulo que describe una figura X, directamente ya es invariante a la translación, al obtener el centro geométrico y tomarlo como el origen del plano (x, y); además, la función de la figura Y (figura X rotada un ángulo α) tiene la misma función de la figura X, pero desfasada un ángulo α ; por consiguiente, se empieza a trasladar la función Y sobre la función X y, al coincidir estas, se puede afirmar la invarianza ante la rotación (Figura 9); por último, el valor de compacidad está definido como:

$$\frac{A}{P^2} \quad (5)$$

El cual es un parámetro invariante a la escala y, por ende, se completan las propiedades de invarianza TRS.

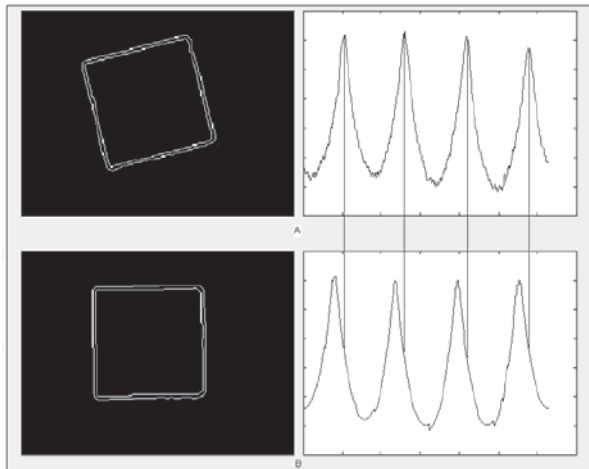


Figura 9. Función angular: A) Cuadrado 0 grados; B) Cuadrado rotado un ángulo α .

2.4.5. OBTENCIÓN DEL “CENTRO GEOMÉTRICO”

Es importante resaltar que realmente no se está hallando el centro geométrico, sino un punto

interno del contorno, en lo posible alejado del borde; es decir, primero se obtiene la distancia entre los dos píxeles del contorno más lejanos entre sí, llamada diámetro mayor (Figura 10), la mitad de cuya distancia será el origen (0,0) y a partir de él se tiene un nuevo plano (x, y) (Figura 11). En algunos casos (cuadrados, rectángulos y círculos), el punto de origen hallado a partir del método descrito anteriormente (diámetro mayor) coincidirá con su centro geométrico.

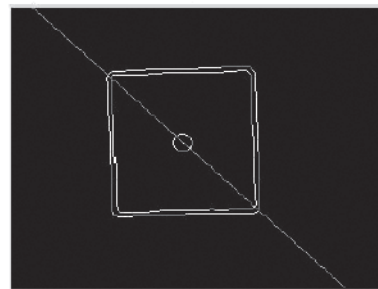


Figura 10. Diámetro mayor.

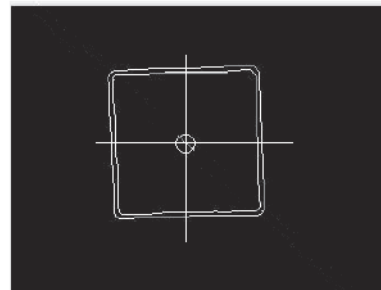


Figura 11. Nuevo plano (x, y).

Las Figuras 9, 10 y 11 visualizan contornos de borde doble, pero no se debe olvidar que se está utilizando el borde externo para los procesos mencionados anteriormente, pues simplemente no se está visualizando ese paso.

2.4.6. ÁREA, PERÍMETRO Y COMPACIDAD MEDIANTE CONTEO DE PÍXELES

Para el conteo de píxeles no es necesario obtener el diámetro mayor, simplemente se extrae el borde externo de la figura y luego se realiza un escaneo de la matriz de la imagen punto a punto (Xi, Yj), con lo que se obtienen tanto coordenadas con píxeles de valor por encima de un umbral (borde), como coordenadas donde el píxel vale cero (región externa e interna del contorno, es decir, fondo negro). Con esto tenemos el número de píxeles que conforman el borde (perímetro). El área se obtiene por medio de un proceso que recorre la matriz verticalmente y mide las distancias entre cada par de puntos que forman el borde, para luego moverse al siguiente píxel de manera horizontal y obtener las distancias de los puntos de dicho segmento del área. Al final, hay que calcular la sumatoria de las distancias de cada segmento y con esto tener la totalidad del área interna de la imagen.

Un parámetro invariante a la escala es la excentricidad o elongación de cualquier región. Esta adopta valores mayores cuanto más se parezca a un círculo, tomando entonces el valor de uno. Cuando el contorno presenta muchos pliegues, el perímetro aumenta, por lo que la elongación tiende a cero. Este parámetro puede utilizarse como primer discriminante en el proceso de clasificación de un objeto.

$$Elongación = 4\pi \frac{Área}{Perímetro^2} \tag{6}$$

Comparando la ecuación (5) que define la compacidad con la ecuación (6), tenemos que la única variación es el termino 4π . Igualmente, la ecuación de compacidad sigue dependiendo del área y el perímetro de la imagen. Sin embargo, el método de conteo tiene una gran falla y, por consiguiente, no es prudente utilizar solamente algoritmos de

este tipo, ya que existe la posibilidad de estar comparando dos contornos, con el mismo valor de área o perímetro, pero de formas completamente distintas, y ello puede dar como resultado datos erróneos a la salida (grado de coincidencia de los contornos).

2.4.7. ÁREA, PERÍMETRO Y COMPACIDAD MEDIANTE LA FUNCIÓN DEL ÁNGULO QUE DESCRIBE EL CONTORNO

Al obtener cierta cantidad de puntos que conforman la función del ángulo $r(\theta)$ que describe el contorno, se procede a interpolar los datos; de esta manera, se consigue una mayor cantidad de puntos, luego se integra numéricamente y se obtiene un valor equivalente al área de la función. Ahora se aplica la ecuación (7) de integral de línea para determinar el perímetro (longitud de la curva) y a partir de estos dos parámetros se obtiene la compacidad:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \tag{7}$$

Donde $y(t)$ es $r(\theta)$ y, por consiguiente, dt es $d\theta$.

2.5. GUARDAR EL CONTORNO QUE SE DESEA BUSCAR POSTERIORMENTE

En primer lugar, se debe enseñar al software cuál es la figura que posteriormente se debe buscar, que ha sido capturada a través de la cámara web y se ha tratado con los procesos de escala de grises, filtrado, DWT (contorno primario), adelgazamiento de bordes (borde doble), extracción del contorno externo, diámetro mayor, firmas (área, perímetro, compacidad) y conteo de píxeles (área, perímetro, compacidad). Se crea un archivo

(archivo .mat), que guarda los valores de la matriz que describe el contorno, el área, perímetro y compacidad, tanto por firmas como por conteo de píxeles (Figura 12).

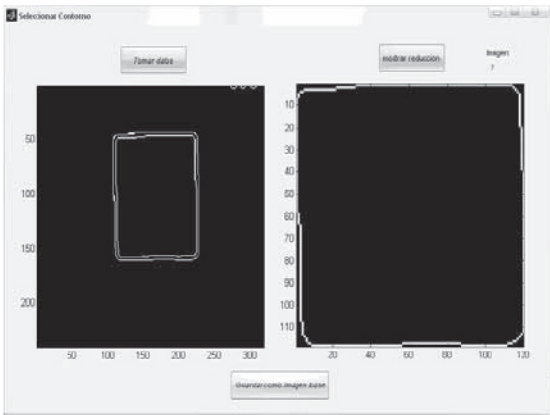


Figura 12. Selección de contorno a guardar para posteriormente comparar.

2.6. COMPARACIÓN DE CONTORNOS

El paso siguiente es propiamente la comparación de los contornos. Para ello es necesario reiniciar la cámara, es decir, activarla para una nueva captura (la cámara se deshabilita cada vez que se captura una imagen), luego se eligen los procesos que se quiere realizar, para cotejar la imagen capturada contra la imagen previamente guardada (archivo .mat), estos procesos son:

- Cálculo del área por conteo de píxeles.
- Cálculo del perímetro por conteo de píxeles.
- Cálculo de compacidad por conteo de píxeles.
- Cotejo de funciones angulares.
- Cálculo del área con la función.
- Cálculo del perímetro con la función.
- Cálculo de la compacidad con la función.
- Cálculo de la diferencia entre diámetros mayores.

Este cálculo de la diferencia entre diámetros mayores busca los dos píxeles más lejanos entre sí. Después se calcula la distancia entre ellos (diámetro mayor) y luego se divide en dos esta distancia. Esto se hizo inicialmente para obtener un punto interno del contorno que permitiese encontrar la función angular del contorno. Sin embargo, se ha puesto este proceso como otro parámetro de comparación, ya que es invariante a la rotación y translación, por lo que se comporta como un descriptor y se obtiene otro discriminante para la comparación de contornos.

2.7. GRADO DE COINCIDENCIA

Por último, obtenemos los resultados acerca del grado de coincidencia de los contornos que han sido comparados (contorno guardado vs. contorno capturado). Cada proceso calcula un parámetro específico (por ejemplo, el área) de cada uno de los contornos a comparar y genera un porcentaje de error. La suma de los errores de cada proceso es por consiguiente el error total y no debe exceder el error permitido elegido por el usuario. Si el valor del error total es menor o igual al valor del error permitido, el grado de coincidencia es positivo (Figura 13). De lo contrario, el grado de coincidencia será negativo.



Figura 13. Cotejo de imágenes (respuesta positiva).

3. RESULTADOS

A partir de la captura de imágenes bajo ambiente controlado, se desarrolló un software con las siguientes características:

- Realiza la captura y digitalización de una imagen de video.
- Hace una conversión de la imagen digitalizada a su equivalente Wavelet.
- Filtra los datos obtenidos de la transformada Wavelet para extraer solo la información del contorno.
- Coteja los datos obtenidos contra lo datos buscados.
- Entrega el grado de coincidencia entre el contorno buscado y la imagen digital capturada por la cámara.

4. PERSPECTIVAS

El software fue implementado sin ambiente controlado con el objetivo de dejar sentada una base de conocimiento para futuras investigaciones, por ejemplo su transferencia a la industria a nivel de plataformas móviles (robots). Dichas implementaciones, están condicionadas, entre otras a las siguientes circunstancias:

- Las imágenes analizadas deben tener un alto contraste con respecto al fondo.
- La iluminación debe garantizar el contraste entre la imagen y el fondo.
- De haber múltiples imágenes de colores muy parecidos y estas no deben estar sobre-

puestas, ya que el algoritmo las reconocería como un solo objeto.

- Algunas de las técnicas de análisis de contorno no pueden ser usadas en todo tipo de imágenes, por sus características particulares.
- El funcionamiento del programa en tiempo de ejecución se ve limitado por las características técnicas del PC.

5. CONCLUSIONES

- La determinación de descriptores invariantes ante translaciones, rotaciones y escalado son condiciones primordiales para el reconocimiento de formas en visión artificial.
- La transformada Wavelet discreta (DWT) es una herramienta óptima para la obtención de un contorno primario y la extracción de ruido.
- La luminosidad ambiente es uno de los factores más determinantes para el procesamiento de una imagen capturada a través de una cámara web.
- Los distintos métodos para el cotejo de imágenes conllevan ciertas restricciones, según los tipos de formas a analizar.
- El pretratamiento de la imagen es un paso vital para la aplicación de la DWT.
- Entre mayor sea el contraste entre el fondo y las figuras, mejores serán los resultados obtenidos.
- La resolución de la cámara digital es un factor determinante en el procesamiento de imágenes que nos ocupa.

- Las figuras o formas empleadas deben cumplir la característica de que, al trazar vectores desde su “centro geométrico” en dirección a cada punto del contorno, ninguno de estos vectores corte más de un punto del contorno, siempre y cuando se aplique el análisis de signatura.
 - Al aplicar los algoritmos de conteo de píxeles, se puede presentar que el rango de error entre figuras diferentes sea muy bajo, debido a que existe similitud en el área o perímetro.
 - El diámetro mayor es un parámetro de cotejo que complementa muy bien los análisis por conteo.
 - Este sistema puede ser implementado a un bajo costo.
- [5] Eduardo Pedro Serrano. *Introducción a la transformada wavelet y sus aplicaciones al procesamiento de señales de emisión acústica*. Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de General San Martín. 2006.
- [6] I. Daubechies. “Ten lectures on Wavelets”. *(CBMS-NAF) Conference Series in Applied Mathematics*, 61. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [7] V. Kindratenko. *Shape Analysis*. 2001. Disponible en: <http://www.ncsa.uiuc.edu/~kindr/phd/index.pdf>
- [8] Beyonddiscovery. “Wavelets: ver el bosque y los árboles”. Disponible en: http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276-04.html
- [9] R. Polikar. *The Wavelet Tutorial*. Durham Computation Center, Iowa State University, 1995. Disponible en: <http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>

REFERENCIAS

- [1] Rafael Soriano Molina. “Del procesamiento a la visión artificial”. Dpto Ciencias de la Computacion e I.A., Universidad de Granada. Disponible en: decsai.ugr.es/mia/complementario/t1/del_proc_a_va.pdf.
- [2] José Muñoz Pérez. “Representación de formas y descripción cap. 8”. Disponible en: www.lcc.uma.es/~munozp/pi_cap8.pdf
- [3] The Mathworks. *Matlab Image Processing Toolbox™ 6 User’s Guide*. 2008.
- [4] Manuel Berrocoso Domínguez, Yolanda Jiménez Teja. *Del análisis de Fourier a la teoría de Wavelets*. Universidad de Cadiz, 2004.