



ALGORITMO PARA LA PLANEACIÓN DE TRAYECTORIAS DE ROBOTS MÓVILES EMPLEANDO ENJAMBRES DE PARTÍCULAS BROWNIANAS

ALGORITHM FOR MOBILE ROBOT TRAJECTORY PLANNING USING SWARMS OF BROWNIAN PARTICLES

Helbert E. Espitia C.¹

Jorge I. Sofrony E.²

Fecha de envió: Febrero 2011

Fecha de recepción: Marzo de 2011

Fecha de aceptación Abril de 2011

Resumen:

En este documento se presenta la propuesta de un algoritmo para la planeación de trayectorias empleando un modelo de partículas activas Brownianas. Existen varios métodos para la planeación de trayectorias en robótica móvil, siendo de los más populares el basado en campos potenciales artificiales, sin embargo, este método tiene la desventaja de presentar mínimos locales, lo cual puede hacer que el robot no logre llegar al punto destino. Aunque ya se han realizado aplicaciones de partículas para evadir mínimos locales, en la propuesta aquí presentada se busca emplear un modelo compacto que permita la planeación de trayectorias evadiendo mínimos locales.

Palabras clave:

Robótica móvil, planeación trayectorias, enjambres, partículas activas brownianas.

Abstract:

This paper presents the proposal of an algorithm for path planning using a model of active Brownian particles. There are several path planning methods in mobile robotics, the most popular being the one based on artificial potential fields. However, the drawback to this method is the local minima, which may lead the robot to failure when reaching its target. Although particle applications have been developed to avoid

local minima, the proposal presented here is aimed at employing a more compact model that allows trajectory planning avoiding local minima.

Key Words:

Mobile robotics, Path Planning, Active Brownian Particles.

1. Introducción

El comportamiento de muchos seres vivos está sujeto a la interacción que se presenta con sus vecinos, lo cual es útil para búsqueda de alimento como también para evadir

¹ Ingeniero Electrónico-Mecatrónico, Especialista en Telecomunicaciones Móviles, Magister en Ingeniería Industrial, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: heespitiac@unal.edu.co

² Ingeniero Eléctrico, M.Sc. en Sistemas de Control, Ph.D. en Sistemas de Control, Universidad Nacional de Colombia. Correo: jsufronye@unal.edu.co

depredadores. El modelado de estos comportamientos ha sido un foco de atención en áreas como matemática, física, biología e ingeniería, y adicionalmente se ha buscado emplear este comportamiento para poder solucionar problemas en ingeniería.

La descripción del comportamiento de muchos entes biológicos se caracteriza por exhibir movimiento cooperativo coordinado, como el de poblaciones de bacterias, que presentan movimientos basados en quimiotaxis; también se observa este tipo de comportamiento en bandadas de aves, cardúmenes de peces e incluso en microorganismos como el zooplankton [1], [2] y [3]. De los modelos más empleados para representar este comportamiento se tienen: el de partículas autopropulsadas [4] y [5], y el de partícula activa browniana [6], modelo que considera un componente estocástico, a diferencia del primero. Estos modelos tienen la característica de poder describir el movimiento de partículas con vorticidad. Por lo general, se suelen emplear potenciales de Morse para representar la interacción entre individuos; sin embargo, en [7] se puede observar un esquema más compacto que emplea un potencial parabólico para describir la interacción entre individuos. En particular, los modelos de enjambres han sido empleados exitosamente para generar trayectorias de uno o varios robots, siendo uno de los trabajos más representativos el desarrollado por Colin McInnes y Wahid Abdel [8].

La aplicación que se presenta en este documento emplea modelos de partículas activas brownianas, donde se busca tener un algoritmo con pocos parámetros que incorpore una fuerza de autopropulsión y un componente de movimiento browniano. En particular, con este modelo se busca explotar la característica de la formación de vórtices.

El algoritmo propuesto consiste en un movimiento de traslación de partículas, cuando estas no están en un mínimo local, y de un comportamiento de vorticidad (circular), cuando las partículas se encuentren en un mínimo local. El principio del algoritmo consiste en incrementar la fuerza de autopropulsión cuando el enjambre se encuentre en un mínimo local, de tal forma que las partículas puedan escapar de este y así, finalmente, lleguen al punto destino.

2. Planeación de trayectorias para robots móviles

Convencionalmente, el problema de generación de trayectorias para un robot móvil indica que, dado un robot y un ambiente, se puede determinar una trayectoria entre dos puntos específicos si el robot está libre de colisiones y si satisface cierto criterio de desempeño [9] y [10]. De los métodos para la planeación de trayectorias se tienen, en un primer lugar, los basados en grafos, de los cuales se distinguen: grafos de visibilidad [11], diagramas de Voronoi [12], modelado del espacio libre [13] y descomposición en celdas [14] y [15]. Otro tipo de métodos empleados para la planeación de trayectorias parten de un enfoque estocástico, dando lugar al algoritmo de planeación aleatoria de trayectorias (RPP, *Randomized Path Planner*) [16], al algoritmo de mapas probabilísticos (PRM, *Probabilistic Road Map Method*) [17] y [18] y al algoritmo de árboles de exploración rápida (RRT, *Rapidly Exploring Random Tree*) [19].

2.1. Planeación de trayectorias empleando el método de campos potenciales

El método de campos potenciales es una de las técnicas más populares en la generación

La aplicación que se presenta en este documento emplea modelos de partículas activas brownianas, donde se busca tener un algoritmo con pocos parámetros que incorpore una fuerza de autopropulsión y un componente de movimiento browniano.

de trayectorias para robots móviles, por ser una forma elegante en la solución de este problema. De los primeros desarrollos, se tiene el presentado por Khatib [20]. Aquí se propone que los obstáculos y el robot tienen una carga eléctrica del mismo signo, con la finalidad de generar una repulsión, mientras que la meta tiene asociada una carga eléctrica de signo opuesto para atraer al robot al punto de destino. Convencionalmente, los potenciales atractivos y repulsivos se generan de forma separada, y el potencial total del espacio de trabajo se obtiene como la suma de estos.

Para generar la trayectoria con estos potenciales solo se requiere el cálculo de gradientes para encontrar la trayectoria; sin embargo, pueden ser no convexos y presentar mínimos locales, lo cual dejaría caer al robot en una trampa. Otra desventaja consiste en la estimación de los parámetros del campo potencial para lograr una adecuada evasión de obstáculos. Modificaciones al planteamiento original de campos potenciales se realizan considerando las anteriores limitaciones: Volpe y Khosla [21] proponen las funciones potenciales supercuadráticas (*Superquadric Artificial Potential Functions*), donde se emplea un amplio conjunto de formas, desde rectángulos hasta elipses, empleando fórmulas supercuadráticas. Una propuesta basada en la solución de la ecuación de Laplace para la transferencia de calor se propone de forma separada en Connolly [22] y, adicionalmente, en Kim y Khosla [23]; este método emplea funciones potenciales armónicas (*Harmonic Potential Functions*). Para el caso donde se tienen obstáculos en movimiento, Ge y Cui [24] proponen un nuevo conjunto de funciones potenciales que dependen tanto de la posición como de la velocidad de los obstáculos.

3. Modelo empleado

El modelo seleccionado para la implementación del algoritmo de planeación de trayectorias se basa en la forma de locomoción del zooplancton *Daphnia*, con lo cual se busca aprovechar la característica aleatoria de búsqueda y la forma de locomoción con característica de vorticidad, ya que, tal como se presenta en [8], esta puede ser una buena estrategia para evadir mínimos locales. El modelo seleccionado para ser implementado en la generación de trayectorias es:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i \quad (1)$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_{pro,i} + \vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{esp,i} + \vec{F}_{est,i} \quad (2)$$

La primera ecuación corresponde al cálculo de posición \vec{r}_i de la partícula, conociendo su velocidad \vec{v}_i . La segunda ecuación corresponde al cálculo de la velocidad de la partícula, donde m_i es la masa de la i -ésima partícula.

La fuerza de autopropulsión se considera como:

$$\vec{F}_{pro,i} = (-\alpha + \beta |\vec{v}_i|^2) \vec{v}_i \quad (3)$$

El anterior término es muy similar al presente en la ecuación de Rayleigh, la cual presenta un comportamiento de ciclo límite. Cuando actúa solo esta fuerza, la velocidad de las partículas en estado estable tiende a ser $|\vec{v}_i| = \sqrt{\alpha/\beta}$ [5] y [4].

La fuerza de interacción de las partículas está dada por:

$$\vec{F}_{int,i} = -a(\vec{r}_i - \vec{R}) = -\frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (4)$$

Donde \vec{R} corresponde al centro de masa del enjambre: $\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j$

La información de los obstáculos y la meta se encuentra contenida en el campo potencial U_{esp} , donde se puede emplear cualquier tipo de funciones potenciales para su implementación, aunque en esta propuesta se emplean potenciales parabólicos U_{obj} para la meta, y barrera de potencial exponencial para los obstáculos U_{obs} ; las expresiones de estos potenciales son:

$$U_{obj}(\vec{r}) = k_{obj} \text{dis}(\vec{r}, \vec{r}_{obj})^2 \quad (5)$$

$$U_{obs}(\vec{r}) = k_{obs} \text{dis}(\vec{r}, \vec{r}_{obs})^{-1} \quad (6)$$

Donde \vec{r}_{obj} es la posición de la meta y \vec{r}_{obs} la posición del obstáculo. La función de distancia en coordenadas rectangulares es:

$$\text{dis}(\vec{r}, \vec{r}_a) = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2} \quad (7)$$

Considerando M obstáculos, el potencial total se puede calcular como:

$$U_{esp} = U_{obj}(\vec{r}) + \sum_{m=1}^M U_{obs,m}(\vec{r}) \quad (8)$$

La fuerza sobre cada partícula que se produce por el potencial U_{esp} es:

$$\vec{F}_{esp,i} = -k_f \nabla_i U_{esp}(\vec{r}_i) \quad (9)$$

Donde k_f es una constante que pondera la influencia que tienen los obstáculos y la meta.

Finalmente, se tiene la fuerza estocástica $\vec{F}_{est,i} = \vec{x}_i(t)$, la cual, según [25], evita el colapso de los individuos, de tal forma que se puede omitir la interacción de repulsión de corto rango. Adicionalmente en [7] y [25] se muestra que el término $\vec{x}(t)$ permite tener una transición entre un movimiento traslacional a uno rotacional cuando se tienen las mismas condiciones iniciales en la posición y la velocidad. Para efectos prácticos, esta fuerza se calcula mediante una distribución normal de media cero y varianza D .

4. Simulación del modelo

Considerando $F_{dis} = -F_{pro}$ en la Figura 1, se puede apreciar su comportamiento para diferentes valores de α y β , donde la parte negativa representa la fuerza de propulsión

Figura 1. F_{dis} como función de v : a) para $\beta = 1$ y α con 2, 1 y 0,4; b) α y β con 2, 1 y 0,4.

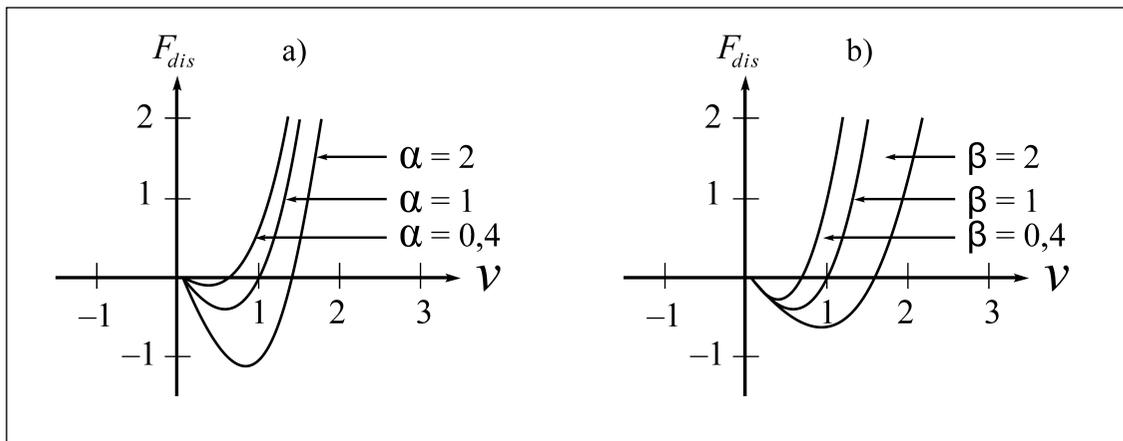
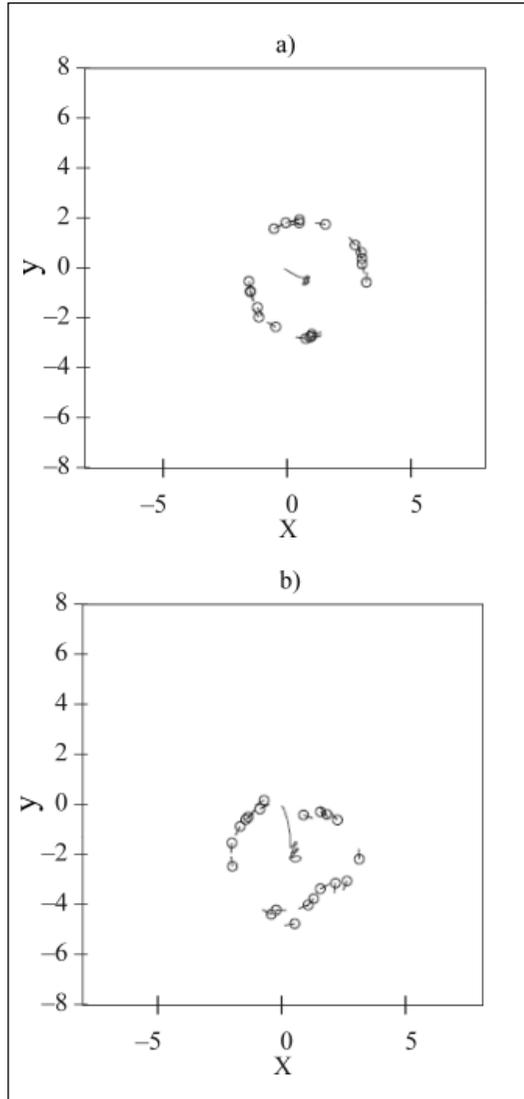


Figura 2. Simulación del modelo:
a) $D = 0$; b) $D = 1$.



suministrada a la partícula, mientras que los valores positivos corresponden a la fuerza de frenado.

Para 300 iteraciones, $m_i = 1$, $\alpha = 1$, $N = 20$, $\alpha = 1$, $\beta = 0,2$ y condiciones iniciales aleatorias el resultado de la simulación del modelo se presenta en la Figura 2, donde se aprecia el comportamiento de la vorticidad de las partículas.

5. Propuesta para evitar mínimos locales

El algoritmo propuesto tiene por objeto aumentar la energía de propulsión del enjambre α cuando se alcanza un mínimo local, y solo se disminuye cuando el enjambre es capaz de escapar de este punto. Para lograr lo anterior, se considera una variable U_{min} que se actualiza con el valor mínimo del campo potencial de $U_{esp}(\vec{R})$, lo que puede ser expresado como:

$$U_{min} = \begin{cases} U_{esp}(\vec{R}), & \text{if } U_{min} \geq U_{esp}(\vec{R}); \\ U_{min}, & \text{if } U_{min} < U_{esp}(\vec{R}). \end{cases} \quad (10)$$

La adición de la energía se logra con el factor de propulsión:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_e \quad (11)$$

Donde α_0 es el factor de propulsión nominal y α_e representa una adición de energía. Este término debe ser positivo y limitado, esto significa que:

$$0 \leq \alpha_e \leq \alpha_{max} \quad (12)$$

En esta propuesta, el término α_e se calcula como:

$$\frac{d\alpha_e}{dt} = \begin{cases} \tau_c, & \text{if } U_{min} \geq U_{esp}(\vec{R}); \\ -\tau_d, & \text{if } U_{min} < U_{esp}(\vec{R}). \end{cases} \quad (13)$$

Es de apreciar que, cuando el enjambre se encuentra en un mínimo local, $U_{min} \geq U_{esp}(\vec{R})$ el término α_e aumenta añadiendo la energía de propulsión. Esta acción continuará sucediendo hasta que las partículas escapen del mínimo local. El aumento de la energía viene dado por el parámetro τ_c . Cuando el enjambre escapa del mínimo local, la energía adicional se libera a una tasa negativa de τ_d .

6. Algoritmo propuesto

Para aplicar el modelo dinámico del enjambre, las ecuaciones diferenciales se discretizan considerando un intervalo de tiempo Δt , de tal forma que se tiene:

$$\vec{r}_i(n) = \vec{r}_i(n-1) + \vec{v}_i \Delta t \quad (14)$$

$$\vec{v}_i(n) = \vec{v}_i(n-1) + (\vec{F}_{pro,i} + \vec{F}_{int,i} + \vec{F}_{esp,i} + \vec{F}_{est,i}) \Delta t / m_i \quad (15)$$

La contribución de α_e en tiempo discreto es:

$$\alpha_e(n) = \alpha_e(n-1) + \Delta t \begin{cases} \tau_c, & \text{si } U_{min} \geq U_{esp}(\vec{R}); \\ -\tau_d, & \text{si } U_{min} < U_{esp}(\vec{R}). \end{cases} \quad (16)$$

Finalmente, el algoritmo propuesto para la planeación de trayectorias se puede apreciar a continuación:

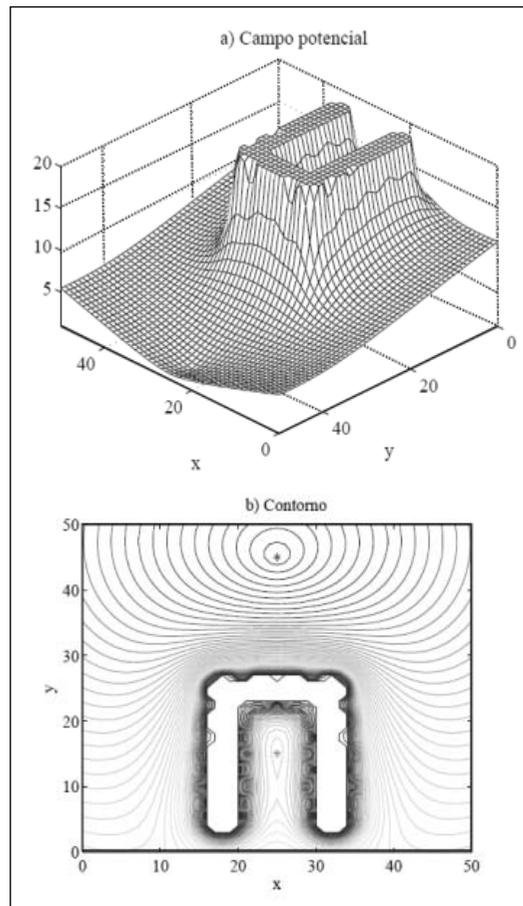
```

1 Inicializar el enjambre en el espacio solución. La
  posición inicial de origen. La velocidad inicial es
  aleatoria
2 Begin
3 While Hasta llegar al punto de destino
  o bajo algún criterio de financiación. do
4   Calcular  $U_{act}$  y  $U_{mini}$ 
5   Calcular  $U_{\alpha e}$ 
6   for  $i = 1$  hata  $N$  do
7     Calcular la nueva Posición de la partículas,
      empleando la ecuación 14 Calcular la nueva
      velocidad de las partículas, empleando
      la ecuación 15
8   end
9 end
10 Establecer el trayecto final
11 end
    
```

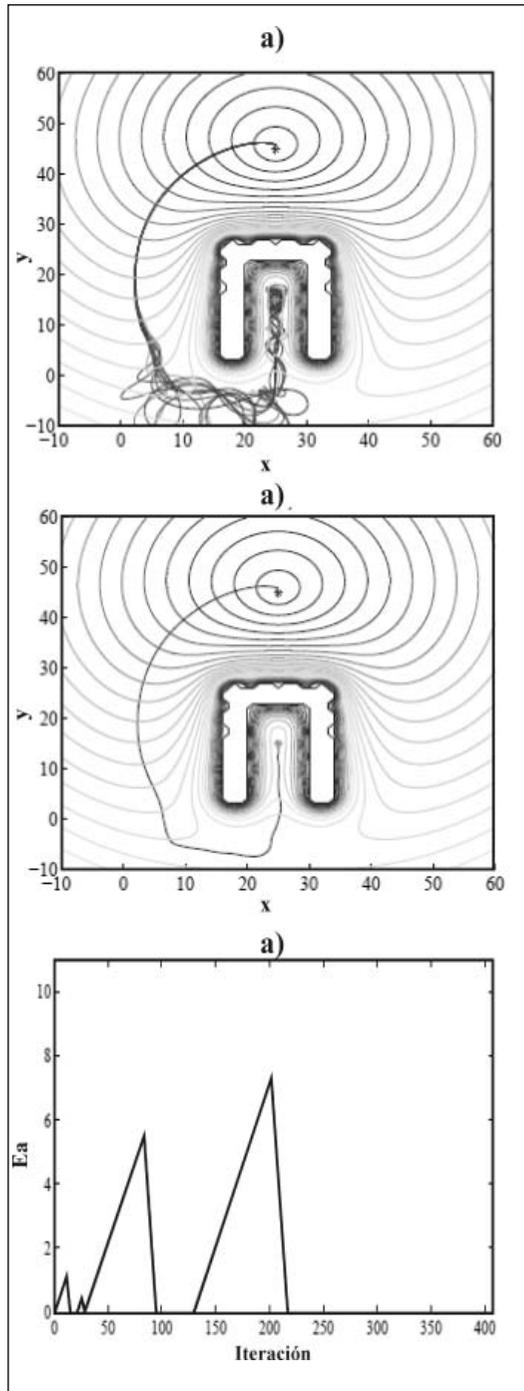
7. Aplicación en un campo potencial con trampa tipo U

El obstáculo tipo trampa en forma de U es un problema clásico que se considera en la planeación de trayectorias [8] y [26]. Este tipo de obstáculo generalmente presenta por lo menos un mínimo local, el cual suele ser difícil de evadir, por la misma forma del obstáculo. La configuración del campo potencial implementado para este caso se presenta en la Figura 3a) y el contorno de este campo potencial se puede observar en la Figura 3b), donde se aprecia la presencia de dos mínimos locales.

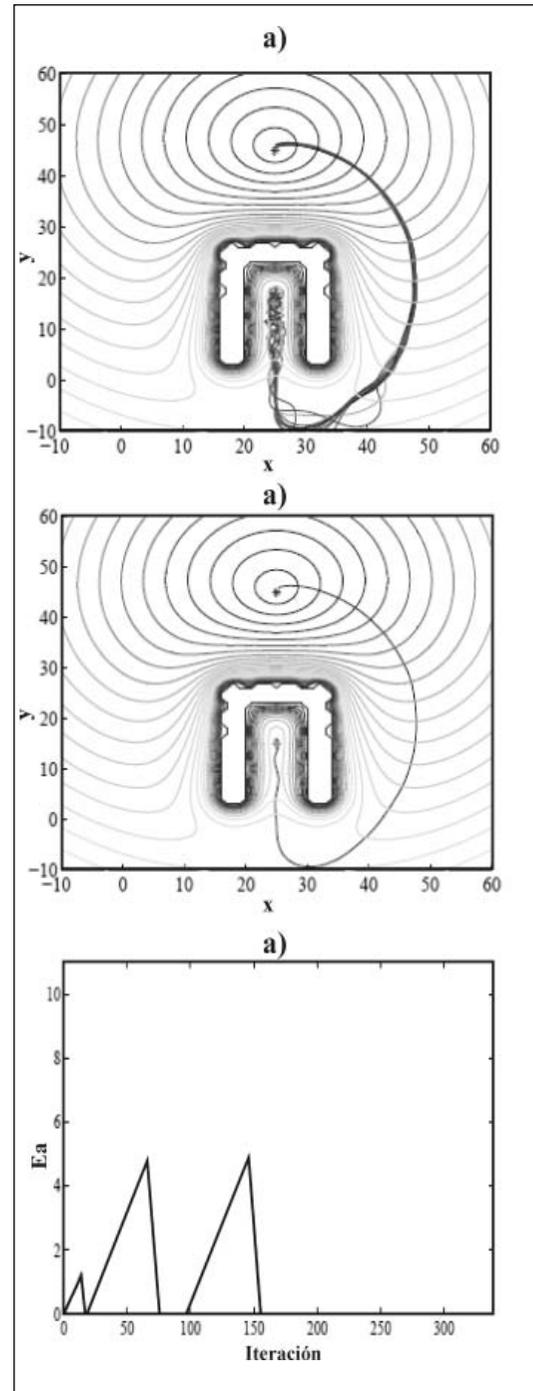
Figura 3. Obstáculo tipo trampa en forma de U:
a) Superficie; b) Contorno.



**Figura 4. a) Trayectorias de las partículas;
b) trayectoria promedio del enjambre;
c) energía adicionada para evadir el mínimo local, para $D = 0$.**



**Figura 5: a) Trayectorias de las partículas;
b) trayectoria promedio del enjambre;
c) energía adicionada para evadir el mínimo local, para $D = 1$.**



En las Figuras 4 y 5 se muestran los resultados más representativos del algoritmo, variando D . Los otros parámetros del algoritmo son $N = 10$, $\beta = 0.2$, $\alpha_0 = 10$, $a = 1$, $\Delta t = 0.1$, $\tau_c = 1.0$, $\tau_e = 0.1$, $k_f = 30$, $k_u = 0.10$, con $0 \leq \alpha_e \leq 10$.

En estas figuras se observa la existencia de dos mínimos locales, por lo cual el algoritmo incrementa la energía en dos oportunidades para escapar de estos puntos. Luego de escapar del obstáculo tipo trampa, la energía de propulsión disminuye, lo cual hace que el enjambre se agrupe y llegue al punto objetivo. Cuando el enjambre de partículas se encuentra en la trampa se tiene una trayectoria irregular; sin embargo, al escapar de la trampa la trayectoria es suave.

7.1. Resultados

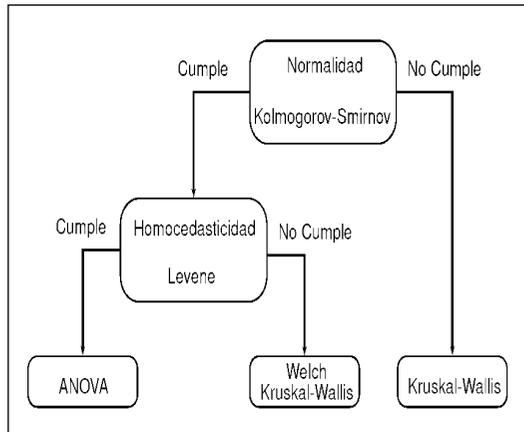
Los resultados para 10 ejecuciones del algoritmo con las diferentes configuraciones de parámetros se pueden apreciar en la Tabla 1. Los valores consignados en esta tabla corresponden al número de iteraciones requeridas para llegar al punto objetivo.

7.2. Análisis de resultados

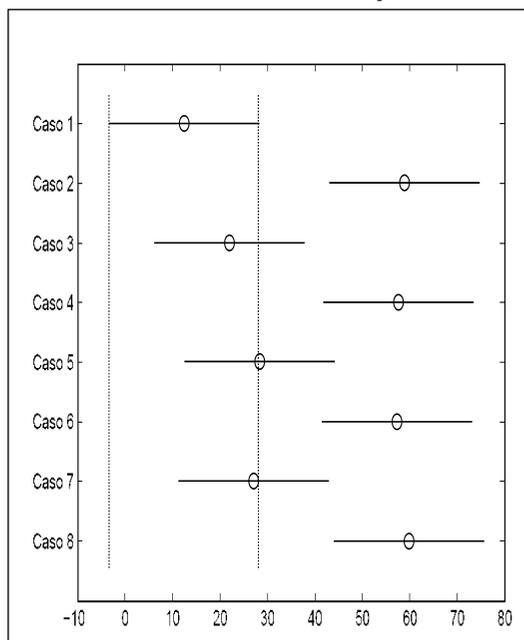
Para determinar si existe diferencia significativa en los resultados se realiza un análisis estadístico utilizando la metodología descrita en la Figura 6 (véanse [27] y [28]). Esta metodología permite elegir entre las pruebas paramétricas y no paramétricas, dependiendo de si se cumplen los supuestos de varianza y homocedasticidad.

Tabla 1. Resultados para el campo potencial con trampa tipo U.

Caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8
D	0	0	0	0	1	1	1	1
N	10	10	20	20	10	10	20	20
β	0,2	0,5	0,2	0,5	0,2	0,5	0,2	0,5
Ejecución 1	419	543	359	504	339	575	344	582
Ejecución 2	341	710	426	460	496	478	493	869
Ejecución 3	361	474	441	575	341	740	527	634
Ejecución 4	341	573	402	1000	410	659	385	640
Ejecución 5	352	600	353	620	579	513	606	476
Ejecución 6	396	700	413	567	409	713	370	711
Ejecución 7	343	773	524	910	640	518	348	1.029
Ejecución 8	367	653	349	625	349	671	445	541
Ejecución 9	339	958	354	815	429	679	406	584
Ejecución 10	382	559	403	581	468	583	415	578
Media	364,1	654,3	402,4	665,7	446,0	612,9	433,9	664,4
Varianza	739,9	19.450,2	2.940,5	32.341,8	10.349,6	8.395,4	7.219,2	27.769,6

Figura 6. Metodología para establecer la prueba de hipótesis


Con los datos de la Tabla 1 se realiza la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov que produce un p - *value* de 0,1581, mayor que el nivel de significancia de 0,05, por lo cual se realiza la prueba de homocedasticidad de Levene y se obtiene un p - *value* de

Figura 7. Resultados de la comparación para los casos con variación de parámetros.


0,0012, con lo que la hipótesis de igualdad de varianzas se rechaza. Considerando esto se puede emplear la prueba de Welch o de Kruskal-Wallis para determinar si existe variabilidad significativa entre los diferentes grupos de parámetros [27]. Aplicando la prueba de Kruskal-Wallis se obtiene un p - *value* de $9,7462 \times 10^{-9}$, concluyendo de esta forma que existen diferencias significativas entre los casos. Con el fin de establecer la relación de casos que presentan diferencias se realiza la prueba de Tukey que produce los resultados mostrados en la Figura 7.

Con estos resultados se aprecia el efecto que tienen los parámetros considerados sobre el número de iteraciones requeridas para llegar al destino, siendo significativo el efecto que tiene el coeficiente de la fuerza de frenado (β) en el desempeño del algoritmo.

8. Conclusiones

Este trabajo mostró que el algoritmo propuesto logra evadir mínimos locales en el proceso de planeación de trayectorias empleando campos potenciales. La principal característica de la técnica propuesta consiste en utilizar un modelo de partículas activas brownianas, con lo cual se busca emular el comportamiento de ciertos seres vivos.

Para mostrar el funcionamiento del algoritmo se consideró un caso estándar. En el análisis se observó que, de los casos considerados, el parámetro que tiene mayor influencia en el algoritmo es el coeficiente asociado a la fuerza de frenado.

En un trabajo futuro se espera ajustar la función asociada al factor de propulsión, de tal forma que las partículas puedan escapar mínimos locales de manera más eficiente.

Considerando que las partículas presentan movimientos circulares se propone en un trabajo futuro incorporar un procesamiento que permita descartar estos movimientos en la trayectoria final del robot.

Referencias

- [1] Udo Erdmann, Werner Ebeling, Lutz Schimansky-Geier, Anke Ordemann y Frank Moss. "Active brownian particle and random walk theories of the motions of zooplankton: application to experiments with swarms of daphnia". *Journal of Theoretical Biology*, 9 (febrero de 2008).
- [2] Ya-Chieh Hsin. "Emergence of vortex swarming in daphnia". Term Paper for Emergent State of Matter, verano de 2006.
- [3] Ebeling Werner. "Nonequilibrium statistical mechanics of swarms of driven particles". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 314(1-4) (noviembre de 2002): 92-96.
- [4] Herbert Levine, Wouter-Jan Rappel y Inon Cohen. "Self-organization in systems of self-propelled particles". *Physical Review E*, 63 (2000).
- [5] M. R. D'Orsogna, Y. L. Chuang, A. L. Bertozzi y L. S. Chayes. "Self-propelled particles with soft-core interactions: patterns, stability, and collapse". *Physical Review Letters*, 96, 2006.
- [6] Werner Ebeling y Udo Erdmann. "Nonequilibrium Statistical Mechanics of Swarms of Driven Particles". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 314(1-4) (noviembre de 2002): 92-96.
- [7] Udo Erdmann, Werner Ebeling y Alexander S. Mikhailov. "Noise-Induced Transition from Translational to Rotational Motion of Swarms". *Physical Review E*, 2005.
- [8] M. H. M. Abdel Wahid y Colin R. McInnes. "Wall following to escape local minima for swarms of agents using internal states and emergent behavior". International Conference of Computational Intelligence and Intelligent Systems ICCIIS, 2008.
- [9] F. Gómez-Bravo, F. Cuesta y A. Ollero. "Planificación de trayectorias en robots móviles basada en técnicas de control de sistemas no holónomos". XXIV Jornadas de Automática, 2003.
- [10] Aníbal Ollero Baturone. *Robótica, manipuladores y robots móviles*. Marcombo, 2001.
- [11] Nils Nilsson J. "A Mobile Automaton: An Application of Artificial Intelligence Techniques". Proc. of the 1st International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1969.
- [12] Armando Segovia y Michkle Rombaut. "Path Finding from a Spot Image for a Mobile Robot". Intelligent Vehicles 93 Symposium, 1993.
- [13] Rodney A. Brooks. *Solving the Find-Path Problem by Good Representation of Free Space*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1983.
- [14] Tomás Lozano Pérez. *Spatial planning: a configuration space approach*. IEEE Transactions on Computers, 1983.

- [15] Nora H. Sleumer y Nadine Tschichold Gürman. *Exact Cell Decomposition of Arrangements used for Path Planning in Robotics*. Swiss Federal Institute of Technology, 1999.
- [16] Jérôme Barraquand, Bruno Langlois y Jean-Claude Latombe. *Numerical Potential Field Techniques for Robot Path Planning*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1992.
- [17] Lydia E. Kavraki y Jean-Claude Latombe. "Probabilistic Roadmaps for Robot". En *Practical Motion Planning in Robotics: Current Approaches and Future Directions*. John Wiley, 1998.
- [18] Mark H. Overmars y Petr Svestka. *A probabilistic learning approach to motion planning*. Proceeding in Workshop on Algorithmic Foundations of Robotics, 1994.
- [19] Stephen R. Lindemann y Steven M. LaValle. *Steps Toward Derandomizing RRTs*. IEEE Fourth International Workshop on Robot Motion and Control, 2004.
- [20] O. Khatib. "Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots". *International Journal of Robotic Research*, 5(1) (1986): 90.
- [21] P. Khosla y R. Volpe. *Superquadric artificial potentials for obstacle avoidance and approach*. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Philadelphia, 26-28 de abril de 1988.
- [22] C. I. Connolly y J. B. Burns. *Path Planning using Laplace's equation*. IEEE Conference on Robotics and Automation, 1994.
- [23] J. O. Kim y P. K. Khosla. *Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions*. IEEE Conference on Robotics and Automation, Sacramento, 1991, pp. 790-796.
- [24] S. S. Gey y Y. J. Cui. *New potential functions for mobile robot path planning*. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(5) (2000): 615.
- [25] Alexander S. Mikhailov y Damián H. Zanette. "Noise-induced breakdown of coherent collective motion in swarms". *Physical Review E*, 60(44) (1999): 4571-4575.
- [26] Omid Esmaeili, Sai Tang, Ismail Napsiah. "Development of a new minimum avoidance system for a behavior-based mobile robot". *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 2009.
- [28] A. J. Arriaza Gómez et al. *Estadística básica con R y R-Commander*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, 2008.
- [29] Cagnina Leticia Cecilia. "Optimización mono y multiobjetivo a través de una heurística de inteligencia colectiva". Tesis de Doctorado en Ciencias de la Computación, Universidad Nacional de San Luis, Argentina, 2010.