VISIÓN ELECTRÓNICA

NOCIONES DE MEJORAMIENTO EN LA CATEGORÍA DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS

CONCEPTS OF IMPROVEMENT IN THE CATEGORY OF TOPOLOGICAL SPACES

Carlos J. Ruiz[1]

Jorge A. Hernández[2]

José R. Montañez[3]

Fecha de envío: Enero de 2011
Fecha de recepción: Febrero de 2011
Fecha de aceptación: Marzo de 2011

Resumen:

Haciendo uso de topologías iniciales y finales se muestra una forma de construir subcategorías reflexivas y correflexivas de la categoría de los espacios topológicos, método que se extiende a categorías topológicas.

Palabras clave:
Subcategoría reflexiva, subcategoría correflexiva, funtor adjunto.

Abstract:
By using initial and final topologies, a way to build reflective and co-reflective subcategories within the category of topological spaces is shown. This method can be extended to topological categories.

Key Words:
Reflective subcategory, coreflective subcategory, adjoint functor.

1. Introducción

Es frecuente en el trabajo de ciertas áreas de la matemática construir objetos enriquecidos y con propiedades universales a partir de objetos dados. Estas ideas motivan las definiciones de subcategorías reflexivas y correflexivas, las cuales expresan mejoramiento y densidad[4]. Por ejemplo, la categoría de los espacios compactos Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares; en este caso, el proceso de optimización es precisamente la compactación de Stone-Cech, que define un funtor adjunto a izquierda del funtor de inclusión de los Compactos Hausdorff en los completamente regulares. Para citar otro ejemplo, la categoría de los espacios métricos es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios pseudométricos, lo cual significa que todo espacio pseudométrico determina un espacio métrico con cierta propiedad universal. Particularmente en estos dos

1 Matemático, Ph.D. en Matemáticas, Universidad de Lille. Docente Escuela Colombiana de Ingeniería. Correo: crlos.ruiz@escuelaing.edu.co

2 Matemático, Especialización en Matemática Avanzada. MsC en Matemáticas. Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: jahernandezp@udistrital.edu.co

3 Matemático, Ph.D. en Matemáticas. Docente Universidad Nacional de Colombia. Correo: rmontanezp@unal.edu.co

4 Este trabajo puede considerarse una ampliación del publicado en [1] y expuesto por los mismos autores en el evento correspondiente.

ejemplos, el objeto y su mejorado cambian de conjunto subyacente.

El objetivo del presente trabajo es mostrar, haciendo uso de topologías iniciales y finales, una forma de construir subcategorías reflexivas y correflexivas de la categoría de los espacios topológicos, sin cambiar el conjunto subyacente, lo cual se verá en el título 3. Las categorías de los espacios secuenciales y de los completamente regulares se obtienen con dichos métodos. Como se podría observar, el trabajo descrito en la categoría de los espacios topológicos se generaliza a categorías topológicas. En particular, en una de sus direcciones de trabajo, la topología categórica aparece como el estudio de la generalización del funtor Olvido de Estructura de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los conjuntos, en especial de las propiedades relativas a la posibilidad de construir topologías iniciales y finales que tiene dicho funtor. Podemos decir que la topología categórica se inicia con los trabajos de Bourbaki, y trabajos más recientes se encuentran en J. Adámek [2], J. Adámek, H. Herrlich y G. Strecker [3] y G. Preuss [4]. Finalmente, creemos que el trabajo enriquece la teoría de los espacios topológicos en aspectos que poco se consideran y que giran alrededor de las topologías iniciales y finales. A su vez, esta teoría, al demostrar que no es exclusiva de los espacios topológicos, enriquece la teoría de categorías.

2. Nociones básicas

En esta sección se presentan las nociones básicas para el desarrollo del trabajo, como son las de subcategoría reflexiva y correflexiva y sus caracterizaciones. Estas nociones se ejemplifican en las áreas del álgebra y de la topología.

Definición 1 [2]**:** Sea C una categoría y H una subcategoría de C. Se dice que H es *reflexiva* en C si, para todo objeto V de C, existe un objeto V^* en H y un morfismo $r_v : V \to V^*$, llamado la reflexión de V, tales que, para todo objeto U de H y todo morfismo $f : V \to U$, existe un único morfismo $f^* : V^* \to U$ tal que $f^* \circ r_v = f$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "r_v"] \arrow[dr, "f"'] & V^* \arrow[d, "f^*"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Puede observarse que la reflexión de cada objeto es única, salvo isomorfismos, y que el morfismo $r_v : V \to V^*$ es un epimorfismo. Además, si H es reflexiva en C y K es reflexiva en H, entonces K es reflexiva en C.

Definición 2 [2]: Dados los funtores $F : C \longrightarrow D$ y $G : D \longrightarrow C$, se dice que F es adjunto a izquierda de G y que G es adjunto a derecha de F, si para todos los objetos X de C y Y de D se tiene el isomorfismo natural de clases $[F(X), Y]_D \cong [X, G(Y)]_C$.

La siguiente proposición es una caracterización de las subcategorías reflexivas. Véase [2], por ejemplo. Dado el caso que nos ocupa, aquí se presentan los elementos esenciales de la prueba.

Proposición 1: H es una subcategoría reflexiva de una categoría C, si y solamente si el funtor Inclusión $I : H \to C$ tiene adjunto a izquierda.

Demostración: Sea H una subcategoría reflexiva en C. Sea $R : C \to H$ el funtor que asigna a cada objeto V de C el objeto $R(V) = V^*$ y a cada morfismo $f : V \to U$ le asigna el morfismo $R(f) = (r_u \circ f)^* : V^* \to U^*$.

Vemos que el funtor *R* es el adjunto a izquierda de *I*. Para cada par de objetos *U, V* de *C* consideremos la aplicación Φ: $[V, I(U)] \to [R(V), U]$ definida por Φ (*f*) = *f** para cada morfismo $f : V \to U$. Φ está bien definida, puesto que para cada morfismo f el morfismo $f^* : V^* \to U$ es único por definición de subcategoría reflexiva. Φ es inyectiva: en efecto, si $\Phi(f) = \Phi(g)$, es decir, $f^* = g^*$, entonces, $f^* \circ r_v = g^* \circ r_v$; luego, $f = g$. Φ es sobreyectiva: en efecto, dado $p : V^* \to U$, se determina el morfismo $p \circ r_v : V \to U$ y claramente $\Phi(p \circ r_v) = (p \circ r_v)^* = p$. Por tanto, Φ es un isomorfismo que resulta natural, como lo exige la definición de funtor adjunto a izquierda.

Supongamos ahora que el funtor $R : C \to H$ es adjunto a izquierda del funtor $I : H \to C$. Veamos que *H* es reflexiva en *C*. Sean: *V* un objeto de *CC*, y *U* un objeto de *H*, y sea Φ_{VU}, $\Phi_{VU} : [V, I(U)] \to [R(V), U]$ la biyección exigida en la definición de adjunción: tomando $U = R(V)$ se determina el morfismo $\Phi^{-1}_{VU}(i_{R(V)}) : V \to R(V)$, donde $i_{R(V)} : R(V) \to R(V)$ es el morfismo Identidad. El objeto *R*(*V*) de *H* es la reflexión del objeto *V* de *C*. En efecto, sea $f : V \to W$ un morfismo, entonces, por la naturalidad exigida en la definición de adjunción, se verifica la igualdad $\Phi_{VW}(f) \circ \Phi^{-1}_{VU}(i_{R(V)}) = f$. Además, si $g \circ \Phi^{-1}_{VU}(i_{R(V)}) = f$, entonces $\Phi_{VW}(f) \circ \Phi^{-1}_{VU}(1_{R(V)}) = g \circ \Phi^{-1}_{VU}(i_{R(V)})$, de donde el morfismo $\Phi_{VW}(f) : R(V) \to W$ es el único que satisface la condición requerida. Por tanto, $\Phi^{-1}_{VU}(i_{R(V)}) : V \to R(V)$ es la reflexión de *V*.

De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva y su caracterización correspondiente.

Ejemplos 1: Subcategorías reflexivas

1. Sea C la categoría de los espacios pseudométricos. Los objetos de esta categoría son los espacios pseudométricos y los morfismos son las contracciones.

Sea H la categoría de los espacios métricos. Es claro que H es subcategoría de C. Veamos que H es reflexiva en C, hecho que se menciona en [2], de lo cual a continuación haremos una prueba completa.

Sea (V, d) un objeto de C, en el conjunto V se define la relación "*x~y*, si y solo si $d(x, y) = 0$". Claramente, esta relación es de equivalencia. Notemos como $\bar{v}$ los elementos del conjunto cociente *V/~*. Sea $\Re$ el conjunto de los números reales. La aplicación $\bar{d} : V/\sim \times V/\sim \to$ R definida por $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) := d(x, y)$ es una función. En efecto, supongamos que *x~x* y que *y~y*, luego $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{d}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Entonces $d(x, y) \le d(x, x_1) + d(x_1, y) \le d(x, x_1) + d(x_1, y_1) + d(x_1, y)$ como $d(x, x_1) = 0$, y $d(y, y_1) = 0$, entonces. De forma similar se prueba que $d(x_1, y_1) \le d(x, y)$, es decir, que $d(x, y) = d(x_1, y_1)$, por tanto, $\bar{d}$ está bien definida, luego (*V/~d*,) es un espacio métrico.

Así se determina la función $r_v = V \to V/\sim$ por $r_v(x) := \bar{x}$, que es una contracción. En efecto, $\bar{d}(r_v(x), r_v(y)) \le \bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y)$.

Finalmente, veamos que *V/~* es la reflexión de *V*. Sea (*U*, d_u,) un espacio métrico y $f : V \to U$ una contracción. Entonces se define la función $f^* = V/\sim \to U$ por $f^*(\bar{x}) := f(x)$; donde f^* está bien definida, pues si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces $d(x, y) = 0$. Como f es una contracción, se cumple que $0 \le d_u(f(x), f(y)) \le d(x, y) = 0$, pero d_u es una métrica, es decir, $f(x) = f(y)$

y, así, $f^*(\overline{x}) = f^*(\overline{y})$. Ahora bien, la aplicación $f^*: V/\sim \to U$ es una contracción, puesto que si $\overline{x}, \overline{y}$ son elementos de $V/\sim$ entonces $d_u(f^*(\overline{x}); f^*(\overline{y})) = d_u(f(x), f(y)) \leq d(x,y) \leq \overline{d}(\overline{x}, \overline{y})$, ahora r_v es un epimorfismo, luego es el único que cumple la relación $f^* \circ r_v = f$.

2. Sea C la categoría de los espacios topológicos. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas. Sea H la categoría cuyos objetos son los espacios topológicos con la topología trivial, es decir, si U es un conjunto no vacío, su topología es $\{\phi, U\}$, donde ϕ es el conjunto vacío y los morfismos son las funciones continuas. Claramente H es una subcategoría de C.

Veamos que H es reflexiva en. Sea (V,τ) un objeto de C. Entonces $(V,\{\phi,V\})$ es un objeto de H. La aplicación identidad $i: (V,\tau) \to (V,\{\phi,V\})$ es una función continua y es la reflexión de (V,τ). En efecto, para todo espacio topológico $(U,\{\phi,V\})$ de H y toda función continua $f: (V,\tau) \to (U,\{\phi,U\})$ de H, la función $f^*: (V,\{\phi,V\}) \to (U,\{\phi,U\})$ definida por $f^*(V) =: f(V)$ es continua y es tal que $f^* \circ i = f$. Ahora bien, f^* es la única que verifica esta última igualdad, puesto que i es epimorfismo.

3. Sea C la categoría de los conjuntos preordenados. Los objetos de esta categoría son los conjuntos en cada uno de los cuales está definida una relación entre sus elementos, que denotaremos $(\leq)$, la cual es reflexiva y transitiva, y los morfismos de esta categoría son las funciones que preservan el orden, es decir, si A y B son conjuntos preordenados, una función $g: A \to B$ es un morfismo en esta categoría, si para todos los elementos a,b de A, tales que $a \leq b$, se tiene que $g(a) \leq g(b)$

Sea H la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados; los objetos de esta categoría son los conjuntos parcialmente ordenados, es decir, conjuntos en cada uno de los cuales está definida una relación entre sus elementos, también notada $(\leq)$, la cual es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Los morfismos de esta categoría son funciones que preservan el orden en el mismo sentido de la categoría C. Claramente H es una subcategoría de C.

Veamos que H es reflexiva en C. Sea $(V,\leq)$ un conjunto preordenado. En el conjunto V se define una relación entre sus elementos, así: "$x \sim x$, si y solo si $x \leq y$ y $y \leq x$". Esta relación es de equivalencia en V. Entonces, se determina el conjunto cociente $V/\sim$, cuyos elementos notaremos con $\overline{x}$, siempre que x sea elemento de V.

Ahora, en el conjunto $V/\sim$ definimos una relación entre sus elementos, la cual notaremos por "$\leq'$", así: para todo $\overline{x}, \overline{y}$ elementos de $V/\sim$, $\overline{x} \leq' \overline{y}$, si y solamente si $x \leq y$. Nótese que la relación $\leq$ está bien definida. En efecto, supongamos que $\overline{x} = \overline{y}'$ $\overline{x} = \overline{x}'$ y $\overline{y} = \overline{y}'$, entonces $x \leq x', x' \leq x, y \leq y', y' \leq y$, luego: $x \leq' y \leftrightarrow x \leq y \leftrightarrow x' \leq x \leq y \leq y' \leftrightarrow \overline{x}' \leq' \overline{y}'$.

De otra parte, la aplicación $r_v = V \to V/\sim$ definida por $r_v(x) := \overline{x}$ es un morfismo en esta categoría y es además la reflexión de V. En efecto, si $(U,\leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $f: V \to U$ es un morfismo, entonces la aplicación $f^*: = V\sim \to U$ definida por $f^*(\overline{x}) := f(x)$ es un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados y verifica la igualdad $f^* \circ r_v = f$.

Obsérvese que f^* es el único morfismo que verifica esta última igualdad, porque r_v es epimorfismo por ser este una función sobreyectiva.

4. Sea X un conjunto no vacío y $P(X)$ el conjunto de partes de X. Sea C la categoría que determina la relación de contenencia en el conjunto $P(X)$.

Sea τ una topología sobre X y sea H la categoría que determina la relación de contenencia en el complemento de τ, (τ^c), con respecto a $P(X)$. Entonces H es una subcategoría reflexiva de C. En efecto, sea $A \in P(X)$, entonces $A \subset \overline{A}$, y $\overline{A} \in \tau^c$. Ahora, si existe un conjunto B en τ^c tal que $\overline{A} \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$, luego $\overline{A}$ es la reflexión de A.

5. Sea C una categoría y H una subcategoría reflexiva de C. Se determina una categoría C' de la siguiente manera:

a) Objetos de C': morfismos de C.

b) Morfismos de C': Dados dos objetos f y g de C', los morfismos con dominio f y codominio g son las parejas (h, k), donde h y k son morfismos de C tales que $k \circ f = g \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[d, "k"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

c) Composición de morfismos: Si (h, k) y (h_1, k_1) son morfismos de f en g y de g en t respectivamente, $((h,k): f \to g,\ (h_1,k_1): g \to t)$, se define $(h_1,k_1) \circ (h,k) =: (h_1 \circ h, k_1 \circ k)$, así:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \bullet \arrow[d, "k"] \\
\bullet \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h_1"'] & \bullet \arrow[d, "k_1"] \\
\bullet \arrow[r, "t"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Como $g \circ h = k \circ f$ y $t \circ h_1 = k_1 \circ g$, se tiene que $t \circ (h_1 \circ h) = (k_1 \circ k) \circ f$, expresada así:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1 o h"'] & \bullet \arrow[d, "k_1 o k"] \\
\bullet \arrow[r, "t"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

C' así determinada es efectivamente una categoría, como puede comprobarse fácilmente.

De forma similar se determina una categoría H' con los morfismos de H, resultando que H' es una subcategoria de C', como lo veremos a continuación:

Sea $f: U \to V$ un objeto de C'. Sean $r_u: U \to U^*$ y $r_v: V \to V^*$ las reflexiones de U y V respectivamente. Entonces, por definición de reflexión, existe un único morfismo $\Phi: U^* \to V^*$ tal que $\Phi \circ r_u = r_v \circ f$, expresada así:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_u"'] & V \arrow[d, "r_v"] \\
U^* \arrow[r, "\phi"'] & V^*
\end{tikzcd}$$

Veamos que el morfismo $(r_v, r_u): f \to \Phi$ es la reflexión de f.

Sea $\alpha: A \to B$ un objeto de H' y sea $(m,n): f \to \alpha$ un morfismo de C'. Entonces, por definición de reflexión, existen los morfismos $\Phi_1: U^* \to A$ y $\Phi_2: V^* \to V$ tales que $\Phi_1 : \circ\, r_u = n$ y $\Phi_2 : \circ\, r_v = m$, es decir, $(\Phi_1, \Phi_2) \circ (r_u r_v) = (n, m)$, expresada así:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "r_u"] \arrow[dd, "n"'] & & V \arrow[dr, "r_v"] \arrow[dd, "m"] & \\
& U^* \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dl, "\phi_1"] & & V^* \arrow[dl, "\phi_2"] \\
A \arrow[rr, "\alpha"] & & B &
\end{tikzcd}$$

Es de anotar que el morfismo (Φ_1, Φ_2): $\Phi_1 \to \alpha$ es el único que verifica esta igualdad, debido a la unicidad de Φ_1 y Φ_2 en la definición de reflexión aplicada en H y C.

Ejemplos 2: Subcategorías correflexivas

1. Sea C la categoría de los espacios topológicos punteados. Los objetos de esta categoría son los espacios topológicos en los cuales se ha fijado un punto base y los morfismos son las funciones continuas que preservan el punto base.

Sea H la subcategoría plena de C formada por los espacios topológicos conexos punteados. Veamos que H es reflexiva en C.

Sea (X, τ_X, x_o). Sea X^* la componente conexa de x_o. Entonces se determina el espacio topológico (X^*, τ_{X^*}, x_o), donde τ_{X^*} es la topología relativa a τ_X.

El espacio topológico (X^*, τ_{X^*}) es conexo y la inclusión $i: X^* \to X$ es continua y es la correflexión de X, como se prueba a continuación.

Sea (Y, τ_Y, y_o) un espacio topológico conexo punteado y $f: Y \to X$ una función continua. Determinamos entonces la aplicación $f^*: Y \to X^*$ definida por $f^*(y) := f(y)$, donde f^* está bien definida, puesto que $f(Y)$ es conexo, por tanto, $f(Y) \subset X^*$. Además, $f^*(y_o) = f(y_o) = x_o$. Ahora f^* es continua, puesto que f lo es. De otra parte, f^* es la única que verifica la igualdad $i \circ f^* = f$, porque i es monomorfismo.

2. Sean $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y Y un subconjunto de X tales que:

(i) Para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $y \leq x$.

(ii) El conjunto Y es cerrado para extremos superiores, es decir, para todo subconjunto A de Y, existe un elemento y_o en Y tal que $a \leq y_o$ para todo $a \in A$; además, si existe y_1 en Y tal que $a \leq y_1$ para todo $a \in A$, se tiene que $y_o \leq y_1$.

Sea C la categoría que determina la relación "$\leq$" en el conjunto X, y sea H la categoría que determina la relación "$\leq$" en el conjunto Y, entonces H es una subcategoría de C y es además correflexiva en C, como lo veremos a continuación.

Sea $x \in X$. Entonces se determina el conjunto $A = \{ y \in Y \mid y \leq x \}$. Nótese que $A \neq \varnothing$, por la condición (i) que caracteriza al conjunto Y. De la condición (ii), anotada anteriormente, se sigue la existencia de un elemento y_o en Y, tal que y_o es el extremo superior de A. Entonces $y_o \leq x$, y, hecho que determina la correflexión de x.

3. Sea C la categoría de los grupos punteados. Los objetos de esta categoría son los grupos en los cuales se ha fijado un punto base, y los morfismos corresponden a los homomorfismos que preservan el punto base.

Sea H la subcategoría plena de C formada por los grupos abelianos punteados. Veamos que H es correflexiva en C.

Sea (G,a) un grupo punteado. Sea N_a el conjunto formado por los elementos que conmutan con a. Entonces (N_a,a) es un grupo abeliano punteado. Veamos que la inclusión $i:N_a \to G$ es la correflexión de G. Claramente "i" es un homomorfismo de grupos e $i(a)=a$. Ahora, sea (K,b) un grupo abeliano punteado y $f:K \to G$ un homomorfismo, tal que $f(b)=a$. Definimos entonces la aplicación $f^*:K \to N_a$ por $f^*(k):=f(k)$; $f^*(k)\in N_a$, o sea que $f^*(k)a=af^*(k)$, pero, como puede observarse, $f^*(k)\ a=f(k)\ a=f\ (k)\ f(b)\ =f(kb)$ $=\ f(bk)=f(b)\ =f(k)\ =\ af^*(k)$; ahora, $f^*(b)=f(b)=a$. De otra parte, f^* es un homomorfismo de grupos, puesto que f lo es. Además, f^* en el único homomorfismo que verifica la igualdad $i\circ f^*=f$, porque i es monomorfismo.

4. Sea X un conjunto no vacío y $P(X)$ el conjunto de partes de X. Sea C la categoría que determina la relación de contenencia en el conjunto $P(X)$.

Sean τ una topología sobre X y H la categoría que determina la relación de contenencia en τ. Entonces H es una subcategoría correflexiva en C. En efecto, sea $A\in P(X)$; entonces A^o es subconjunto de A (A^o es el interior de A), y $A\in\tau$. Ahora, si existe un conjunto B en τ, tal que B es subconjunto de A, por ser A^o el mayor conjunto abierto contenido en A, se tiene que B es un subconjunto de A^o, de lo cual se induce la correflexión de A.

3. Subcategorías de *Top* generadas por topologías iniciales y finales

La categoría de los espacios topológicos Top es una categoría topológica en el sentido de [2], lo cual significa que en Top se pueden construir topologías iniciales y finales, y para cada conjunto la colección de sus topologías tiene estructura de retículo completo. En esta sección se muestra una manera de construir subcategorías reflexivas y correflexivas de Top haciendo uso de la estructura de categoría topológica que tiene Top. Con este propósito, veamos primero algunos hechos conocidos de la topología general que, entre otros, pueden ser consultados en [5] y [6].

3.1. Preliminares

Sea $f:X\to Y$ una función y α una topología sobre Y. La topología inicial sobre X relativa a f y σ está dada por $\{f^{-1}(A)\,|\,A\in\propto\}$, que es la topología menos fina sobre X que hace de f una función continua. Sea $g:X\to Y$ una función y β una topología sobre X, la topología final sobre Y relativa a g y β corresponde a $\{B\,|\,g^{-1}(B)\in\beta\}$, que es la topología más fina sobre Y que hace de g una función continua.

Si X es un conjunto y $\{\mathbf{Y}_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos, la topología inicial para una fuente $\{f_i:X\to\mathbf{Y}_i\}_{i\in I}$ tiene como subbase la familia de abiertos $\{fi^{-1}(A)\,|\,A \textit{ es abierto en } Y_i\}i\,I$.

Si Y es un conjunto y $\{\mathbf{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos, la topología final para un sumidero $\{f_i : \mathbf{X}_i \to Y\}_{i\in I}$ corresponde a la intersección de la familia $\{ A \,|\, f i^{-1}(A)$ *es abierto en* $X_i \} i \in I$.

3.2. Construcción de subcategorías reflexivas y correflexivas de *Top*

Haciendo uso de topologías finales, los espacios topológicos definen endofuntores idempotentes, como se ilustra a continuación.

Sean **W** y **X** espacios topológicos. En la colección de funciones continuas de **W** en **X,** al olvidar la topología de **X** se obtiene el sumidero que notamos así: $S_{(W:X)} = \{ f: W \to X | f \in [W,X]_{Top} \}$

La estructura final para $S_{(W,X)}$ la notaremos así: $F_{S(W,X)}$.

Es natural que $F_{S(W,X)}$ resulte un espacio con topología más fina que la de **X**. Otro detalle a resaltar es que las funciones continuas de **W** en **X** y de **W** en $F_{S(W,X)}$ coinciden. Estos hechos se consideran en los siguientes lemas, los que finalmente van ha permitir definir un endofuntor idempotente a partir de **W**, haciendo uso de topologías finales.

Lema 1: Sean **W** y **X** espacios topológicos. Entonces $X \le F_{S(W,X)}$.

Demostración: Sea g $\in S_{(W,X)}$. Entonces g: W $\to F_{S(W,X)}$ es continua. Ahora, dada la función Identidad i_x: $F_{S(W,X)} \to X$, se tiene que $\mathbf{g} = i_X \circ g : \mathbf{W} \to \mathbf{X}$ es continua. Entonces, por definición de topología final para un sumidero, se tiene que la función identidad i_x:$F_{S(W,X)} \to X$ es continua. Por tanto, $X \le F_{S(W,X)}$.

Lema 2: Sean **W** y **X** espacios topológicos. Entonces $[W,X]_{top} \cong [W, F_{S(W,X)}]_{top}$

Demostración: Sea $\mathbf{g} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$. Entonces g:$\in S_{(W,X)}$, lo cual implica que g $\in [W, F_{S(W,X)}]_{Top}$.

Ahora bien, sea h $\in [W, F_{S(W,X)}]_{Top}$. Por el lema anterior, $X \le F_{S(W,X)}$. Por tanto, $\mathbf{h} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$.

Nótese que este lema está diciendo que el proceso de tomar topologías finales, con el proceso antes descrito, es idempotente.

Teorema 1: Sea W un espacio topológico. La aplicación $E_{\mathbf{W}} : Top \to Top$ definida por $E_w(X) := F_{S(W,X)}$ y $E_w(f) := f$ define a $E_{\mathbf{W}}$ como un endofuntor idempotente en Top.

Demostración:

a) Sea $\mathbf{f} : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ una función continua. Veamos que $\mathbf{f} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Para esto basta demostrar que para toda g: $\in S_{(W,X)}$, la función $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua.

Sea g: $\in S_{(W,X)}$. Entonces $\mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{X}$ es continua, luego $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to \mathbf{Y}$ es continua; de donde $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} : \mathbf{W} \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Entonces, por definición de topología final para un sumidero, se tiene que $\mathbf{f} : E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) \to E_{\mathbf{W}}(\mathbf{Y})$ es continua. Por tanto, $E_{\mathbf{W}}$ es un funtor, y por la forma como este se definió, se deduce que este es un funtor concreto. Así, de (i) y (ii) se tiene que $E_{\mathbf{W}}$ es un elevador. Para completar la prueba veamos que $E_{\mathbf{W}}$ es idempotente.

b) Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Como consecuencia del Lema 2, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$, $[\mathbf{W}, E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})]_{Top} \cong [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$. Entonces, al aplicar $E_{\mathbf{W}}$ a $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$ se consideran las funciones continuas de $[\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}$. Por tanto, las topologías finales para los sumideros $S_{(W,X)}$ y $S_{(W, E_W(X))}$ coinciden; de donde $E^2_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) = E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$.

Observaciones:

1. Puesto que $E_{\mathbf{W}}$ es un funtor idempotente, sus puntos fijos coinciden con su imagen. La subcategoría plena de Top formada por los puntos fijos de $E_{\mathbf{W}}$ la notaremos $E_{\mathbf{W}}(Top)$.

2. El funtor $E_{\mathbf{W}}$ es adjunto a derecha del funtor de inclusión $I: E_{\mathbf{W}}(Top) \to Top$. En efecto, para cada espacio topológico X su correflexión corresponde al espacio $E_{\mathbf{W}}(X)$.

3. $E_{\mathbf{W}}(Top)$ es una subcategoría topológica de Top, en el sentido de Adamek [1]. En efecto, las topologías iniciales y finales en $E_{\mathbf{W}}(Top)$, así como los supremos e ínfimos, se calculan primero en Top y luego se trasladan por medio del funtor $E_{\mathbf{W}}$ a la categoría $E_{\mathbf{W}}(Top)$.

4. Por el Lema 1, para cada espacio topológico $\mathbf{X}$, se tiene que $\mathbf{X} \leq E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X})$. Por tanto, $E_{\mathbf{W}}$ es un elevador idempotente. La teoría relacionada con elevadores idempotentes puede ser consultada en [7].

De la observación anterior resaltamos el siguiente resultado.

Teorema 2: Sea $\mathbf{W}$ un espacio topológico, entonces $E_{\mathbf{W}}(Top)$ es una subcategoría correflexiva de Top.

De manera dual, haciendo uso de estructuras iniciales, un espacio topológico o una familia de espacios topológicos da origen a una subcategoría topológica y reflexiva de Top. En este caso, dado un espacio topológico W la subcategoría generada la notaremos $C_{\mathbf{W}}(Top)$ y usaremos una notación similar cuando nos refiramos a la categoría generada por una familia de espacios topológicos[5].

Ejemplos:

1. Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S} = (S, \tau)$, donde $S = \{0,1\}$ y $\tau = \{\varnothing, \{0,1\}, \{1\}\}$. Entonces $C_{\mathbf{S}}(Top)$ es una categoría isomorfa a Top. Así que podríamos decir que la categoría de los espacios topológicos es generada por el espacio de Sierpinski.

2. Sea A la clase de los compactos de Hausdorff. $E_{\mathbf{A}}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios de Kelley y, por tanto, esta es una subcategoría topológica y correflexiva de Top.

3. Consideremos el intervalo $I = [0,1]$ como subespacio del conjunto de los números reales R con su topología usual. $C_{\mathbf{I}}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares y, por tanto, esta es una subcategoría topológica y reflexiva de Top.

4. La categoría de los espacios de proximidad $Prox$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares. Véase [6], por ejemplo. Por tanto, $Prox$ es una subcategoría topológica y reflexiva de Top.

5. La categoría de los espacios uniformes $Unif$ es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares. Véase [6], por ejemplo. Por tanto, $Unif$ es una subcategoría topológica y reflexiva de Top.

6. Consideremos $N_{\infty} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales R con su topología usual. $E_{\mathbf{N}_{\infty}}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios secuenciales y, por tanto, es una subcategoría topológica y correflexiva de Top.

5 Otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de estructuras iniciales y temas afines han sido publicados por A. Oostra en [8] y [9].

3.3. La categoría de los espacios de Kelley

Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico, se dice que un subconjunto U de $\mathbf{X}$ es compactamente abierto si para cada función continua $\mathbf{f}:\mathbf{C}\to\mathbf{X}$, donde $\mathbf{C}$ es compacto de Hausdorff, $\mathbf{f}^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbf{C}$. Se dice que $\mathbf{X}$ es un espacio de Kelley[6] si cada subconjunto compactamente abierto de $\mathbf{X}$ es abierto en $\mathbf{X}$. Por tanto, si A es la clase de los compactos de Hausdorff, entonces la categoría $E_A(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios de Kelley y, por tanto, es una subcategoría topológica y correflexiva de Top.

3.4. La categoría de los espacios completamente regulares

Definición 1 [6]**:** Un espacio topológico $\mathbf{X}$ es completamente regular si y solo si, para todo subconjunto $\mathbf{A}$ cerrado de $\mathbf{X}$ y para todo $x\in\mathbf{X}$ con $x\notin\mathbf{A}$, existe una función continua $f:X\to I$ tal que $\mathbf{f}(x)=0$ y $\mathbf{f}(\mathbf{A})=1$, siendo $\mathbf{I}=[0,1]$ con su topología usual.

En [6] se demuestra que un espacio topológico $\mathbf{X}$ es completamente regular si y solo si tiene la topología inicial inducida por la familia de funciones continuas y acotadas de valor real. De este hecho se sigue que la subcategoría plena de Top formada por los espacios completamente regulares corresponde a la categoría $C_I(Top)$ y, por tanto, esta es una subcategoría topológica y reflexiva de Top.

3.5. La categoría de los espacios secuenciales

En esta sección se demuestra que la categoría de los espacios secuenciales es representable por el espacio N_∞, siendo este el compactado de Alexandroff del espacio de los números naturales con la topología discreta. Dentro de los espacios secuenciales se encuentran espacios importantes para el trabajo del análisis y de la topología. Los espacios 1-contables, en particular los espacios métricos, son secuenciales; véanse [11] y [6], por ejemplo.

Definición 2 [6]**:** Sea $(\mathbf{X},\tau)$ un espacio topológico de Hausdorff no compacto y localmente compacto. Sea $\mathbf{X}_\infty=\mathbf{X}\cup\{\infty\}$, donde $\infty\notin\mathbf{X}$. El compactado de Alexandroff sobre $\mathbf{X}$ se define como el espacio $\mathbf{X}_\infty$ cuya topología $\tau_{\mathbf{X}_\infty}$ está dada por:

$$\tau_{x\infty}:=\tau\cup\{(X-K)\cup\{\infty\}\,|\,K \textit{ es compacto y cerrado en } \tau$$

Consideremos el conjunto de los números naturales N con la topología discreta. En tal caso, puesto que todo subconjunto $\mathbf{K}$ de N es cerrado, se tiene que $\mathbf{K}$ es finito, si y solo si $\mathbf{K}$ es compacto. Por tanto, $\tau_{N\infty}=P(N)\cup\{(N-K)\cup\{\infty\}\,|\,K \textit{ es finito}\}$ $(N_\infty,\tau_{N_\infty})$ es homeomorfo al espacio $\{0,1,1/2,\ldots,1/n,\ldots\}$ como subespacio de R.

Definición 3 [12]**:** Se dice que un espacio X es secuencial si cada subconjunto secuencialmente abierto de X es abierto. Un subconjunto $A\subseteq X$ es secuencialmente abierto si cada sucesión en X que converge en un punto de A está eventualmente en A; en otras palabras, por fuera de A solo hay un número finito de términos de la sucesión.

Proposición 1: Sea $\mathbf{X}$ un espacio topológico. Una función $s:N_\infty\longrightarrow\mathbf{X}$ es continua, si y sólo si, la sucesión $s:N\to\mathbf{X}$ es convergente en $s(\infty)$.

6 Algunos autores identifican la categoría de los k-espacios con la categoría de los espacios de Kelley, por ejemplo en [10], de donde ha sido tomada esta definición. Sin embargo, la noción de k-espacio dada por S. Willard en [6] no coincide con la dada por M. Hovey en [10].

Demostración:

Supongamos que $s : N_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es una función continua. Sea $s(\infty)$=x$_0$. Veamos que la sucesión $s : N \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0. Sea A abierto en $\mathbf{X}$ tal que $x_0 \in A$. Entonces, puesto que $\mathbf{s} : N_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es continua, $\mathbf{s}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞ y su complemento es finito. Por tanto, la sucesión $s : N \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0.

Recíprocamente, sea $s : N_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ una función tal que la sucesión $s : N \longrightarrow \mathbf{X}$ es convergente a $s(\infty)$. Supongamos que $s(\infty) = x_0$. Sea A un abierto de X. Si $x_0 \notin A$, entonces $s^{-1}(A)$ no contiene a ∞ y, por tanto, $s^{-1}(A) \subseteq N$, de donde $s^{-1}(A)$ es abierto en N_∞. Si $x_0 \in A$, entonces, puesto que la sucesión $s : N \longrightarrow \mathbf{X}$ converge a x_0, $s^{-1}(A)$ contiene a ∞ y su complemente es finito, luego $s^{-1}(A)$ es abierto en N_∞. Por tanto, $\mathbf{s} : N_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$ es continua.

Proposición 2: Las subcategoría plena de *Top* formada por los espacios secuenciales corresponde a la categoría $E_{N_\infty}(Top)$.

Demostración:

Sea $\mathbf{X} \in E_{N_\infty}(Top)$. Veamos que $\mathbf{X}$ es secuencial. Sea $A \subseteq \mathbf{X}$, A secuencialmente abierto. Sea F el conjunto de funciones continuas de N_∞ en $\mathbf{X}$ y S el conjunto de funciones continuas de N_∞ en $\mathbf{X}$ determinadas por las sucesiones convergentes de $\mathbf{X}$ a elementos de A. Entonces $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es finito y $\infty \notin \mathbf{f}^{-1}(A)$, para toda $\mathbf{f} \in S$, lo cual significa que $\mathbf{f}^{-1}(A) \subseteq N$ y, por tanto, que $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞. Ahora, $\infty \notin \mathbf{f}^{-1}(A)$ y $\mathbf{f}^{-1}(A)^c$ es finito para toda $\mathbf{f} \in F - S$, luego $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞. Entonces, para toda $\mathbf{f} \in F$, $\mathbf{f}(A)$ es abierto en N_∞ y, por la forma como se construye la estructura final para el sumidero determinado por F, se sigue que A es abierto en N_∞, que era lo que se quería demostrar.

Supongamos ahora que $\mathbf{X}$ es un espacio secuencial y veamos que $\mathbf{X} \in E_{N_\infty}(Top)$. Para esto, supongamos que $E_{N_\infty}(\mathbf{X}) = \overline{\mathbf{X}}$ y veamos que $\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$. Puesto que E_{N_∞} es elevador $\mathbf{X} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$, luego resta probar que $\overline{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{X}$. Sea A abierto en $\overline{\mathbf{X}}$. Nuevamente, sean F el conjunto de funciones continuas de N_∞ en $\mathbf{X}$ y S el conjunto de funciones continuas de N_∞ en $\mathbf{X}$ determinadas por las sucesiones convergentes de $\mathbf{X}$ en elementos de A.

Entonces, puesto que F también corresponde al conjunto de funciones de N_∞ en $\overline{\mathbf{X}}$, se tiene que para toda $\mathbf{f} \in F$, con $\mathbf{f} : N_\infty \longrightarrow \overline{\mathbf{X}}$, $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞; pero también considerando a $\mathbf{f} : N_\infty \longrightarrow \mathbf{X}$, $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞. Entonces, en este último caso, si $\mathbf{f} \in S$ entonces $\mathbf{f}(\infty) \in A$ y, como $\mathbf{f}^{-1}(A)$ es abierto en N_∞, $\infty \in \mathbf{f}^{-1}(A)$ y $\mathbf{f}^{-1}(A)^c$ es finito, lo cual implica que A contiene casi todos los términos de cada sucesión $\mathbf{f}$ convergente en $\mathbf{X}$ en elementos de A. Por tanto, A es un subconjunto secuencialmente abierto de $\mathbf{X}$ y, como $\mathbf{X}$ es secuencial, se tiene que A es abierto en $\mathbf{X}$.

Corolario 1: La categoría de los espacios secuenciales es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.

Observación: Finalmente, es de anotar que el método de construcción de subcategorías reflexivas y correflexivas de Top expuesto en esta sección se generaliza de manera natural a categorías topológicas. Un trabajo al respecto puede ser consultado en [13]

Referencias

[1] J. Hernández, R. Montañez y C. Ruiz. *Nociones de mejoramiento en teoría de categorías*. Memorias, XI Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2000.

[2] J. Adámek. *Theory of Mathematical Structures*. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1983.

[3] J. Adámek, H. Herrlich y G. Strecker. *Abstract and Concrete Categories*. Nueva York: John Wiley & Sons, 1990.

[4] G. Preuss. *Theory of Topological Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1988.

[5] G. Rubiano. *Topología general*. 2 ed. Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[6] S. Willard. *General Topology*. Adisson Wesley Publishing Company, 1970.

[7] R. Montañez y C. Ruiz. "Elevadores de estructura". *Boletín de Matemáticas*, XIII(2) (2006): 111-135. Nueva serie.

[8] A. Oostra. "Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales". *Lecturas Matemáticas*, 16 (1995): 63-72.

[9] A. Oostra. "The Uniformizable Spaces Are Generated by the Real Numbers". *Ann. New York Acad. Sc.*, 767 (1995): 165-167.

[10] M. Hovey. *Model categories*. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 63. Providence: American Mathematical Society, 1999.

[11] J. L. Kelley. *General Topology*. Princeton:, Van Nostrand, 1955.

[12] S. P. Franklin. "Spaces in which sequences suffice". *Fund. Math*, 57 (1965): 107-115.

[13] R. Montañez. "Funtores elevadores y coelevadores de estructuras". Tesis de Doctorado, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2007.