SOBRE LAS ANTICADENAS DE CONJUNTOS

ON ANTICHAINS OF SETS

Edilberto Sarmiento[1]

Carmen Pulido[2]

Rodrigo Rincón Z.[3]

Fecha de envió: Enero de 2011
Fecha de recepción: Febrero de 2011
Fecha de aceptación: Agosto de 2011

Resumen:

Las anticadenas de conjuntos, son herramientas conceptuales que se han utilizado recientemente en áreas de la ingeniería computacional, como la minería de datos, la autentificación basada en roles así como en criptografía. Sin embargo, en Matemáticas, es un problema abierto el hallar una fórmula para el número de anticadenas sobre un conjunto, como lo es, desde finales del siglo XIX, su célebre equivalente: hallar el número de funciones crecientes de partes de un conjunto X al conjunto {0,1}, propuesto por Dedekind. En este artículo, a partir de un background teórico, se presentan ejemplos y propiedades de la familia de anticadenas y se encuentran, por métodos conjuntistas elementales, cotas inferiores y superiores para el número de estas sobre un conjunto finito.

Palabras clave

Anticadena, cota superior, cota inferior, Teorema de Sperner, problema de Dedekind.

Abstract:

The antichains of sets, are conceptual tools that have recently been used in areas of computer engineering such as data mining, role-based authorization and criptography. However, in mathematics, is an open problem to find a formula for the number of antichains on a set, as it is, from the late nineteenth century, his famous equivalent: find the number of increasing functions of parts of a set X to set {0,1}, proposed by Dedekind. In this article, from a theoretical background, it show examples and properties of the collection of antichains and, by methods elementary sets, it find lower and upper bounds for the number of these on a finite set.

1 Licenciado en matemáticas, MSc. en ciencias Matemáticas. Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación SciBas adscrito al CIDC de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: esarmiento@udistrital.edu.co.

2 Licenciada en matemáticas, MSc. en ciencias Matemáticas. Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación SciBas, adscrito al CIDC de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.Correo: clpulidos@udistrital.edu.co.

3 Licenciado en matemáticas, Esp. en Matemática Aplicada. Docente Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Integrante del grupo de investigación SciBas, adscrito al CIDC de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo: rrinconz@udistrital.edu.co

Key Words:
Antichain, upper bound, lower bound, Sperner theorem, Dedekind problem.

1. Introducción

En matemáticas, es conocido que hallar una fórmula para el número de anticadenas sobre un conjunto finito con n elementos, es un problema abierto. Este es equivalente a hallar el número de funciones crecientes de partes de un conjunto X al conjunto {0,1} - denominado también problema de Dedekind, propuesto por Richard Dedekind en 1887- y también equivalente a hallar el numero de ideales en partes de X. Las anticadenas, sin embargo, son utilizadas recientemente para resolver algunos problemas en minería de datos ver [4] y en autentificación basada en roles como se puede ver en la tesis de doctorado [2]. En este artículo, se presentan propiedades de las anticadenas, su equivalencia con el problema de Dedekind, - las no anticadenas - , y se obtienen, por métodos elementales de teoría de conjuntos, cotas para el número de ellas. En el documento se presentan algunos resultados preliminares; luego se dan definiciones y ejemplos de anticadenas; posteriormente se aborda el estudio del conjunto ordenado de las anticadenas sobre un conjunto fijo; para finalmente mostrar los conjuntos equipotentes a las anticadenas. Los resultados más relevantes son demostrados, y como conclusión se presenta un cálculo del número de anticadenas de conjuntos con cardinales específicos.

2. Notaciones y resultados básicos

A continuación, se dan algunas notaciones, propiedades y resultados básicos de colecciones de conjuntos, útiles para la comprensión posterior, estos se pueden hallar en [1],[3],[6] y [7] .

Sea X un conjunto no vacío y A un subconjunto de X.

Se denota por $|A|$ el cardinal del conjunto A, $\wp(A)$ a la colección de todos los subconjuntos de A y por $\mathcal{H}(A)$ la colección de hiperconjuntos de A

$$\wp(A)=\{B\subseteq X: B\subseteq A\} \tag{1}$$
$$\mathcal{H}(A)=\{B\subseteq X: A\subseteq B\} \tag{2}$$

Sea $\mathcal{A}$ una colección de subconjuntos de A:

$$c\mathcal{A} = \wp(X) - \mathcal{A},\ \mathcal{A}c = \{B \subseteq X: (X - B) \in \mathcal{A}\} \tag{3}$$

$$c\mathcal{A}c = \{B \subseteq X: (X - B) \notin \mathcal{A}\} = \wp(X) - \mathcal{A}c. \tag{4}$$

Resultando que:

$$|\wp(A)| = 2^{|A|},\ |\mathcal{H}(A)| = 2^{|X|-|A|},\ |\mathcal{A}c| = |\mathcal{A}|,\ |c\mathcal{A}| = 2^{2^{|X|}} - |\mathcal{A}|. \tag{5}$$

Para cada entero positivo $m\leq|A|$, A finito, $\wp_m$ es la colección de subconjuntos de A que tienen m elementos:

$$\wp_m(A) = \{B \subseteq A: |B| = m\}.\quad |\wp_m(A)| = \binom{|A|}{m}. \tag{6}$$

y $\mathcal{H}_m(A)$ es la colección de hiperconjuntos de A que tienen m elementos $m\geq|A|$:

$$\mathcal{H}_m(A) = \{B: A \subseteq B: |B| = m\}.\quad |\mathcal{H}_m(A)| = \binom{|A|}{|A| - m + 1} \tag{7}$$

La colección de subconjuntos de A de cardinal mayor que k se denota $\wp_{\uparrow k}(A)$

$$\wp_{\uparrow k}(A) = \{B \in \wp(A): |B| > k\} \tag{8}$$

$$|\wp_{\uparrow k}(A)| = \sum_{i=k+1}^{|A|} \binom{|A|}{i},\quad |\wp_{\uparrow 1}(A)| = 2^{|A|} - |A| - 1 \tag{9}$$

Si $\mathcal{C}$ es una colección $\mathcal{C}_*$ denota a la colección $\mathcal{C}-\{\emptyset\}$.

$$\wp_*(A)=\wp(A)-\{\emptyset\}. \qquad (10)$$

Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son colecciones de conjuntos, $\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}$ denota:

$$\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}=\{A\cup B: A\in\mathcal{A}\wedge B\in\mathcal{B}\}. \qquad (11)$$

Si para cada $A\in\mathcal{A}$ y para cada $B\in\mathcal{B}$, $A\cap B=\emptyset$, entonces

$$|\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}|=|\mathcal{A}||\mathcal{B}|. \qquad (12)$$

Si $P\cap B=\emptyset$ para cada $B\in\mathcal{B}$, entonces

$$|\{P\}\sqcup\mathcal{B}|=|\mathcal{B}|. \qquad (13)$$

Si $\{A_k\}_{k\in I}$ es una colección de conjuntos disyuntos dos a dos, entonces

$$\left|\bigcup_{k\in I}A_k\right|=\sum_{k\in I}|A_k|. \qquad (14)$$

3. Definiciones, Proposiciones, Teoremas y ejemplos de anticadenas

Definición 1:
Sea X un conjunto. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una anticadena de subconjuntos de X, si satisface:

$$A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\nsubseteq B \ \wedge\ B\nsubseteq A. \qquad (15)$$

Notamos por $A(X)$ la familia de todas las anticadenas sobre X.

Ejemplos:

1. $X=\emptyset$ $\wp(X)=\{\emptyset\}$ $\wp^2(X)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=A(X)$
2. $X=\{0\}$ $\wp(X)=\{\phi,X\}$ $\wp^2(X)=\{\phi,\{\phi\},\{X\},\{\phi,X\}\}$ $A(X)=\{\phi,\{\phi\},\{X\}\}$
3. $X=\{0,1\}$ $\wp(X)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},X\}$ $A(X)=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{X\}, \{\{0\},\{1\}\}\}$
4. $X=\{0,1,2\}$ $\wp(X)=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},X\}$. $A(X)=\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\},\{\{2\}\}, \{\{0,1\}\}, \{\{0,2\}\}, \{\{1,2\}\}, \{X\}, \{\{0\},\{1\}\}, \{\{0\},\{2\}\}, \{\{1\},\{2\}\}, \{\{0\},\{1\},\{2\}\}, \{\{0,1\},\{0,2\}\}, \{\{0,1\},\{1,2\}\} \{\{0,2\},\{1,2\}\}, \{\{0\},\{1,2\}\}, \{\{1\},\{0,2\}\}, \{\{0,1\},\{2\}\}, \{\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\}\}\}$,
5. $\emptyset\in A(X)$
6. $Si\ A\in\wp(X),\ \{A\}\in A(X)$.
7. Si $A,B\in\wp(X)-\{\emptyset\}$ y $A\cap B=\emptyset$, entonces $\{A,B\}\in A(X)$.
8. $\wp_k(X)$ es una anticadena sobre X
9. Si $\mathcal{A}\subseteq\wp_k(X)$ entonces $\mathcal{A}$ es una anticadena.
10. Si $\mathcal{P}$ es una partición, entonces $\mathcal{P}$ es una anticadena.

Observación 1.

1. Si $\emptyset\in\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una anticadena, entonces $\mathcal{A}=\{\emptyset\}$.
2. Si X $\emptyset\in\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es una anticadena de subconjuntos de X, entonces $\mathcal{A}=\{X\}$.

La siguiente definición se encuentra en [5]

Definición 2.

Sea X un conjunto finito, $|X|=n$, y $\mathcal{B}\subseteq\wp_k(X)$
La sombra superior de $\mathcal{B}$ notada $\nabla\mathcal{B}$ es:

En el documento se presentan algunos resultados preliminares; luego se dan definiciones y ejemplos de anticadenas; posteriormente se aborda el estudio del conjunto ordenado de las anticadenas sobre un conjunto fijo; para finalmente mostrar los conjuntos equipotentes a las anticadenas.

3. $\bigcup_{k\geq 0}\wp_*(\wp_k(X)) \subseteq A(X)$ (24)

4. Si X es finito, $|X| = n$, $\sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$ (25)

Proposición 7.

1. Si $a \in X, \mathcal{C}_a = \{\{a\}\}\sqcup\wp_1(\wp_{\uparrow 1}(X - \{a\})) \subseteq A(X)$ (26)

2. $\biguplus_{a\in X}\mathcal{C}_a \subseteq A(X)$ (27)

3. $|\biguplus_{a\in X}\mathcal{C}_a| = n(2^{n-1} - n)$ (28)

4. $n(2^{n-1} - n) + \sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$ (29)

Demostración

2. $a, b \in X, a \neq b,\ A \in \mathcal{C}_a\ y\ A \in \mathcal{C}_b$
   $A = \{\{a\}, A_1\}$ y $A = \{\{b\}, A_2\}$, entonces $A_1 = \{b\}$ y $A_2 = \{a\}$, lo que es una contradicción. Luego $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$

3. $|\biguplus_{a\in X}\mathcal{C}_a| = \sum_{a\in X}|\wp_1(\wp_{\uparrow 1}(X - \{a\}))| = \sum_{k=1}^{n}(2^{n-1} - n) = n(2^{n-1} - n)$.

4. Como $(\biguplus_{a\in X}\mathcal{C}_a) \cap (\bigcup_{k\geq 0}\wp_*(\wp_k(X))) = \emptyset$, entonces $n(2^{n-1} - n) + \sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$.

Proposición 8.

Sean $P \in \wp_r(X)$, $r < k \leq n - r$ y
$\mathcal{C}_{krP} = \{P\}\sqcup\wp_*\left(\wp_k(X - P)\right)$ (30)

$$\mathcal{C}_{rP} = \bigcup_{k=r+1}^{n-r}\mathcal{C}_{krP} \quad (31)$$

$$\mathcal{C}_r = \bigcup_{P\in\wp_r(X)}\mathcal{C}_{rP}, \quad (32)$$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{r=1}^{n}\mathcal{C}_r. \quad (33)$$

Entonces

1. $\mathcal{C}_{krP} \subseteq A(X)$
2. Si $k \neq j$ entonces $\mathcal{C}_{krP} \cap \mathcal{C}_{jrP} = \emptyset$.
3. $P, Q \in \wp_r(X), P$, entonces $\mathcal{C}_{rP} \cap \mathcal{C}_{rQ} = \emptyset$.
4. Si $r \neq s$ entonces $\mathcal{C}_r \cap \mathcal{C}_s = \emptyset$. .

Demostración.

2. Si $k \neq j$ entonces $\mathcal{C}_{krP} \cap \mathcal{C}_{jrP} = \emptyset$.
   Supongamos $A \in \mathcal{C}_{krP}$ y $A \in \mathcal{C}_{jrP}$ entonces $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P)$ $y\ A = \{P\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_j(X - P)$, como $k \neq j$, $D_1 \neq D_2$. lo cual es una contradicción.

3. $P, Q \in \wp_r(X), P \neq Q$, entonces $\mathcal{C}_{rP} \cap \mathcal{C}_{rQ} = \emptyset$.
   $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P), r < k\ y\ A =$
   $\{Q\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_k(X - Q)$, entonces
   $P \in D_2\ y\ Q \in D_1 \rightarrow\leftarrow$., es decir hay una contradicción.

4. Si $r \neq s$ entonces $\mathcal{C}_r \cap \mathcal{C}_s = \emptyset$. .
   Supongamos $r < s$ y $A \in \mathcal{C}_r$ y $A \in \mathcal{C}_s$ entonces
   $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P), r < k$
   y $A = \{Q\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_j(X - Q), s < j$,
   entonces $P \in D_2\ y\ Q \in D_1 \rightarrow\leftarrow$.,
   es decir hay una contradicción

Proposición 9.

1. $|\mathcal{C}_{krP}| = 2^{\binom{n-r}{k}} - 1$ (34)

2. $\mathcal{C}_{rP}| = \sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)$. $r < k \leq n - r$. (35)

3. $\mathcal{C}_r| = \binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)$. (36)

4. $\mathcal{C}| = \sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)\right)$. (37)

Demostración.

1. $|\mathcal{C}_{krP}| = |\{P\}\sqcup\wp_*\left(\wp_k(X - P)\right)| = |\wp_*\left(\wp_k(X - P)\right)| = 2^{\binom{n-r}{k}} - 1$

3. $\bigcup_{k\geq 0} \wp_*(\wp_k(X)) \subseteq A(X)$ (24)

4. Si X es finito, $|X| = n$, $\sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$ (25)

Proposición 7.

1. Si $a \in X, \mathcal{C}_a = \{\{a\}\} \sqcup \wp_1(\wp_{\uparrow 1}(X - \{a\})) \subseteq A(X)$ (26)
2. $\uplus_{a\in X}\mathcal{C}_a \subseteq A(X)$ (27)
3. $|\uplus_{a\in X}\mathcal{C}_a| = n(2^{n-1} - n)$ (28)
4. $n(2^{n-1} - n) + \sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$ (29)

Demostración

2. $a, b \in X, a \neq b,\ A \in \mathcal{C}_a\ y\ A \in \mathcal{C}_b$
   $A = \{\{a\}, A_1\}$ y $A = \{\{b\}, A_2\}$, entonces $A_1 = \{b\}$ y $A_2 = \{a\}$, lo que es una contradicción. Luego $\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b = \emptyset$

3. $|\uplus_{a\in X}\mathcal{C}_a| = \sum_{a\in X}|\wp_1(\wp_{\uparrow 1}(X - \{a\}))| = \sum_{k=1}^{n}(2^{n-1} - n) = n(2^{n-1} - n)$.

4. Como $(\uplus_{a\in X}\mathcal{C}_a) \cap (\bigcup_{k\geq 0}\wp_*(\wp_k(X))) = \emptyset$, entonces $n(2^{n-1} - n) + \sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|$.

Proposición 8.

Sean $P \in \wp_r(X)$, $r < k \leq n - r$ y
$\mathcal{C}_{krP} = \{P\} \sqcup \wp_*\big(\wp_k(X - P)\big)$ (30)

$$\mathcal{C}_{rP} = \bigcup_{k=r+1}^{n-r} \mathcal{C}_{krP} \quad (31)$$

$$\mathcal{C}_r = \bigcup_{P\in\wp_r(X)} \mathcal{C}_{rP}, \quad (32)$$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{r=1}^{n} \mathcal{C}_r. \quad (33)$$

Entonces

1. $\mathcal{C}_{krP} \subseteq A(X)$
2. Si $k \neq j$ entonces $\mathcal{C}_{krP} \cap \mathcal{C}_{jrP} = \emptyset$.
3. $P, Q \in \wp_r(X), P$, entonces $\mathcal{C}_{rP} \cap \mathcal{C}_{rQ} = \emptyset$.
4. Si $r \neq s$ entonces $\mathcal{C}_r \cap \mathcal{C}_s = \emptyset$. .

Demostración.

2. Si $k \neq j$ entonces $\mathcal{C}_{krP} \cap \mathcal{C}_{jrP} = \emptyset$.
   Supongamos $A \in \mathcal{C}_{krP}$ y $A \in \mathcal{C}_{jrP}$ entonces $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P)$ $y\ A = \{P\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_j(X - P)$, como $k \neq j$, $D_1 \neq D_2$. lo cual es una contradicción.

3. $P, Q \in \wp_r(X), P \neq Q$, entonces $\mathcal{C}_{rP} \cap \mathcal{C}_{rQ} = \emptyset$.
   $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P), r < k\ y\ A = \{Q\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_k(X - Q)$, entonces $P \in D_2\ y\ Q \in D_1 \rightarrow\leftarrow$., es decir hay una contradicción.

4. Si $r \neq s$ entonces $\mathcal{C}_r \cap \mathcal{C}_s = \emptyset$. .
   Supongamos $r < s$ y $A \in \mathcal{C}_r$ y $A \in \mathcal{C}_s$ entonces
   $A = \{P\} \cup D_1,\ D_1 \subseteq \wp_k(X - P), r < k$
   y $A = \{Q\} \cup D_2,\ D_2 \subseteq \wp_j(X - Q), s < j$,
   entonces $P \in D_2\ y\ Q \in D_1 \rightarrow\leftarrow$.,
   es decir hay una contradicción

Proposición 9.

1. $|\mathcal{C}_{krP}| = 2^{\binom{n-r}{k}} - 1$ (34)
2. $\mathcal{C}_{rP}| = \sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right).\ r < k \leq n - r.$ (35)
3. $\mathcal{C}_r| = \binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right).$ (36)
4. $\mathcal{C}| = \sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)\right).$ (37)

Demostración.

1. $|\mathcal{C}_{krP}| = |\{P\} \sqcup \wp_*\big(\wp_k(X - P)\big)| = |\wp_*\big(\wp_k(X - P)\big)| = 2^{\binom{n-r}{k}} - 1$

2. $|\mathcal{C}_{rP}| = |\bigcup_{k=r+1}^{n-r} \mathcal{C}_{krP}| = \sum_{k=r+1}^{n-r} |\mathcal{C}_{krP}| = \sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right).$

3. $|\mathcal{C}_r| = \left|\bigcup_{P\in\wp_r(X)} \mathcal{C}_{rP}\right| = \sum_{P\in\wp_r(X)} |\mathcal{C}_{rP}| = \sum_{P\in\wp_r(X)}\left(\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)\right) = \binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right).$

4. $|\mathcal{C}| = |\bigcup_{r=1}^{n} \mathcal{C}_r| = \sum_{r=1}^{n} |\mathcal{C}_r| = \sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)\right).$

Proposición 10.

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\binom{n}{r}\sum_{k=r+1}^{n-r}\left(2^{\binom{n-r}{k}} - 1\right)\right) + \sum_{k=0}^{n}\left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) \leq |A(X)|. \qquad (38)$$

Proposición 11.

Sea $\mathcal{A}$ una anticadena sobre $X, \mathcal{A} \sqcup \wp_k(\wp(X - \cup\mathcal{A})) \subseteq A(X)$. $1 \leq k \leq |X - \cup\mathcal{A}|$. (39)

Proposición 12.

Sean X un conjunto finito y $\mathcal{C}$ una colección no vacía de subconjuntos de X, existe una anticadena no vacía $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ una colección de conjuntos. $\mathcal{C}$ es una anticadena o existen A y B tales que $A \subset B$ entonces, $\mathcal{C} - \{A\}$ es una anticadena o existen P y Q de $\mathcal{C} - \{A\}$ tales que $P \subset Q$ y $\mathcal{C} - \{A,P\}$ es una anticadena o repetimos el argumento inicial. Como $\mathcal{C}$ es finito, procediendo de esta manera se obtiene una anticadena $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.ϕ

6. Algunos conjuntos equipotentes a las anticadenas.

A continuación se prueba que las anticadenas son equipotentes a las colecciones cerradas para subconjuntos y al conjunto de funciones crecientes de $\wp(X)$ en $\{0,1\}$.

Proposición 13.

Sea X un conjunto finito.

$CSUB(X) \approx A(X)$.

Demostración.

La función $f: A(X) \to CSUB(X)$, tal que $f(\mathcal{A}) = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \wp(A)$ es biyectiva.

i) inyectiva Si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in A(X), \mathcal{A} \neq \mathcal{B}$, entonces $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} \wp(A) \neq \bigcup_{A\in\mathcal{B}} \wp(A)$ y $f(\mathcal{A}) \neq f(\mathcal{B})$.

ii) si $\mathcal{B} \in CSUB(X), \mathcal{B} = \bigcup_{A\in max\mathcal{B}} \wp(A)$, entonces existe $max(\mathcal{B}) \in A(X)$ tal que $f(max(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.

6.1 Anticadenas y funciones crecientes

Sea $C(X) = \{f: \wp(X) \to \{0,1\}: f \text{ es creciente}\}$

Teorema

$$A(X) \approx C(X).$$

Sea $\mathcal{A}$ una colección cerrada para subconjuntos La función $\varphi_{\mathcal{A}}: \wp(X) \to \{0,1\}$ definida por:

$\varphi_{\mathcal{A}}(P) = \begin{cases} 1, \text{si para todo } A \in \mathcal{A}, P \nsubseteq A \\ 0, \quad \text{en otro caso} \end{cases}$, es creciente.

Demostración.

Si $P \subseteq Q$ y $\varphi_{\mathcal{A}}(P) = 1$, entonces para todo $A \in A, P \nsubseteq A$, $Q \nsubseteq A$, luego $\varphi_{\mathcal{A}}(Q) = 1$.

Sea ϕ una función creciente de $\wp(X)$ en $\{0,1\}$, entonces la colección $\phi^{-1}(0) \in CSUB(X)$.

Sea $M \in \phi^{-1}(0)$ y $N \subseteq M$, entonces $\phi(M) = 0$. Como ϕ una función creciente, entonces $\phi(N) = 0$ y $N \in \phi^{-1}(0)$.

La función $\varphi: CSUB(X) \to CR(X)$ $\varphi(\mathcal{A})$, definida anteriormente, es una biyección, y su inversa es $\Phi: CR(X) \to CSUB(X)$ $\Phi(f) = f^{-1}(0)$.

Demostración

$$\varphi(\Phi(f))(P) = \varphi(f^{-1}(0))(P) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{si existe } A \in f^{-1}(0), P \subseteq A \\ 1, \text{si para todo } A \in f^{-1}(0), P \nsubseteq A \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{si existe } A, f(A) = 0, P \subseteq A \\ 1, \text{si para todo } A, f(A) = 0, P \nsubseteq A \end{cases} \quad (40)$$

$$= f(P) \quad (41)$$

$$\Phi(\varphi(\mathcal{A})) = \varphi(\mathcal{A})^{-1}(0) =$$

$$\{P: \varphi(\mathcal{A})(P) = 0\} = \mathcal{A}. \quad (42)$$

6.2 No anticadenas

Definición 3.

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una no anticadena sobre X si existen $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset$. Notamos por $NA(X)$ a la colección de las no anticadenas sobre X:

$$NA(X) = \{\mathcal{A}: \mathcal{A} \; no \; es \; anticadena\} =$$
$$\wp^2(X) - A(X). \quad (43)$$

Ejemplos

1. $\wp(X) \in NA(X)$ y es el máximo.
2. Si $A, B \in \wp(X)$, $A \subset B$ $\{A, B\} \in NA(X)$.
3. Los minimales de $NA(X)$ son $\{\{A,B\}: A, B \in \wp(X), A \subset B\}$

Proposición 14.

1. Si $\{A_i\}_{i \in I} \subset NA(X)$, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i \in NA(X)$.
2. Si $\mathcal{A} \in NA(X) \; y \; \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B} \in NA(X)$.

Proposición 15.

Sea X un conjunto con n elementos y $\mathcal{D} = \{(A, B): A, B \in \wp(X) \wedge A \subsetneq B\}$.

$\mathcal{D} = \biguplus_{B \in \wp(X)} \wp^*(B) \times \{B\}$.

1. $|\mathcal{D}| = 3^n - 2^n$.

Demostración.

1. $(A, B) \in \biguplus_{B \in \wp(X)} \wp^*(B) \times \{B\} \Leftrightarrow \exists B \in \wp(X)$, $(A, B) \in \wp(B) \times \{B\} \Leftrightarrow \exists B \in \wp(X), A \subsetneq B$ $\Leftrightarrow (A, B) \in \mathcal{D}$.
2. $|\mathcal{D}| = |\biguplus_{B \in \wp(X)} \wp^*(B) \times \{B\}| =$ $\sum_{B \in \wp(X)} |\wp(B)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(2^k - 1) =$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 2^n = 3^n - 2^n$.

Proposición 16.

1) Si $|\mathcal{A}| > \binom{n}{\lfloor (n/2) \rfloor}$, entonces $\mathcal{A} \in NA(X)$.

2) $\wp_{\uparrow m}(\wp(X)) \subseteq NA(X)$, $m = \binom{n}{\lfloor (n/2) \rfloor}$.

Demostración

Contrarrecíproco del teorema de Sperner.

Proposición 17.

Sea $m = \binom{n}{\lfloor (n/2) \rfloor}$.

1. $NA(X) = \wp_{\uparrow m}(\wp(X)) \sqcup \{\mathcal{A}: \mathcal{A} \in NA(X), |\mathcal{A}| \leq m\}$
2. $|NA(X)| = \sum_{k=m+1}^{2^n} \binom{2^n}{k} + \sum_{k=2}^{m} |NA_k|$ $NA_k = \{\mathcal{A} \in NA(X): |\mathcal{A}| = k\}$.
3. $|NA_2| = 3^n - 2^n$.

7. Número de anticadenas para conjuntos de cardinal menor o igual a 8.

De acuerdo con la edificación axiomática que se ha desarrollado y las estrategias operativas dadas, se calcula el número de anticadenas para un conjunto X, con $0 \leq |X| \leq 8$. Los resultados se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. Cálculo del número de anticadenas

$\lvert X \rvert$	$\lvert A(X) \rvert$
0	2
1	3
2	6
3	20
4	168
5	7581
6	7828354
7	2414682040998
8	56130437228687557907788

Conclusiones

- La teoría de hiperconjuntos junto con la cardinalidad asociada a ellos, son fundamentales para la comprensión del problema de calculabilidad de anticadenas. Luego cualquier perspectiva de investigación debe considerarla como punto de partida.
- El teorema de Sperner estima la cardinalidad de una anticadena de subconjuntos de un conjunto X con cardinalidad conocida.
- Dado un conjunto fijo, el conjunto de las anticadenas, $(A(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado, con el orden heredado de $(\wp^2(X), \subseteq)$.
- Las ecuaciones (25), (29) y (38), proporcionan algunas cotas para el número de anticadenas sobre un conjunto X finito.
- Las anticadenas son equipotentes a las colecciones cerradas para subconjuntos y al conjunto de funciones crecientes de $\wp(X)$ en $\{0,1\}$.
- El cálculo de anticadenas para conjuntos finitos demanda alta cantidad de procesamiento computacional debido a la magnitud numérica resultante.
- Se puede ver que los resultados teóricos arrojados al abordar un problema abierto: hallar una fórmula para el número de anticadenas sobre un conjunto finito con n elementos, puede ser, sin embargo, sustento para tecnologías de alto impacto.

Referencias

[1] I. Anderson, Combinatorics of finite sets. Dover Publications Inc. Mineola, NY, 2002

[2] J. Crampton, Authorization and antichains. School of computer science and information system, Birbeck college. 2002

[3] Davey y Priestley, Introduction to Latices and order. Cambridge University Press. 1994

[4] W. Grandineti, Detección de Patrones Emergentes y su formalización utilizando Minería de Datos Incremental. Tesis de

Magister en Ciencias de la computación. Bahia Blanca Argentina Universidad Nacional del Sur. 2005.

[5] P. Lieby, Antichains on three Levels. The electronic Journal of Combinatorics. 2004.

[6] E. Sarmiento, . Colecciones cerradas para complemento. Memorias encuentro de Geometría Junio de 2000 U.P.N

[7] E. Sarmiento. Teoría de Colecciones de conjuntos. Notas de clase. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2007.