



Cotas variacionales para coeficientes efectivos en compuestos con contacto imperfecto

Variational bounds for effective coefficients in imperfect-contact composites

Gabriela López*

Julián Bravo**

Manuel E. Cruz***

Raúl Guinovart****

Reinaldo Rodríguez*****

Fecha de envío: noviembre de 2011

Fecha de recepción: noviembre de 2012

Fecha de aceptación: enero de 2013

Resumen

Se estudia el problema de la conductividad térmica efectiva de un material heterogéneo bifásico tipo matriz-inclusión con microestructura periódica. Este material compuesto es macroscópicamente isótropo y presenta una barrera de resistencia térmica tipo *resorte* en las superficies de contacto de las fases. Se formulan principios variacionales y cotas para el tensor efectivo de la conductividad térmica, resultado de la aplicación del método de homogeneización asintótica. Las cotas dependen de la concentración de volumen de las fases, de la geometría de la inclusión y de la constante de imperfección que caracteriza la barrera de resistencia térmica. Se muestran comparaciones con resultados derivados de otras teorías.

Palabras clave

Compuestos periódicos, homogeneización asintótica, principios variacionales, cotas, propiedades efectivas, contacto imperfecto.

Abstract

The problem of effective thermal conductivity for a matrix-fiber composite with a perio-

dic micro-structure is studied. This composite is globally isotropic with an interfacial surface resistance between phases. Variational principles and bounds are introduced, describing the effective conductivity tensor as a result of the application of the asymptotic homogenization method. These bounds depend on the concentration of each phase as well as on the geometry of the medium,

* Licenciada en Matemática Universidad de La Habana, Cuba. Profesora del Colectivo de Matemática en el Departamento de Macro-Microeconomía en la Facultad de Economía de la Universidad de La Habana. gabriela@fec.uh.cu

** Licenciado en Educación Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, Cuba. Licenciado en Matemática, magister en Ciencias Matemáticas, y doctor en Ciencias Matemáticas Universidad de La Habana. Profesor e investigador titular de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana. jbravo@matcom.uh.cu

*** Ingeniero Mecánico Universidad Federal de Rio de Janeiro (Brasil), magister en Ingeniería Mecánica por la Coordinación de los Programas de Posgradación de Ingeniería, doctor en Ingeniería Mecánica por el Massachusetts Institute of Technology y Posdoctorado por Massachusetts Institute of Technology (EEUU). Actualmente es profesor asociado III de la Universidad Federal de Rio de Janeiro, Brasil. manuel@meccanica.coppe.ufrj.br

**** Licenciado en Educación Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, Cuba. Magister en Ciencias Matemáticas y doctor en Ciencias Matemáticas en la Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana. Profesor titular de la Facultad de Matemática y Computación de la misma universidad. guino@matcom.uh.cu

***** Licenciado en Educación Matemática, Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, Cuba. Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, Facultad de Matemática y Mecánica, Universidad Estatal de Moscú, Rusia. Profesor e investigador titular de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana. reinaldo@matcom.uh.cu

the micro-structure, and the imperfection parameter. Some comparisons with other theoretical results are also provided.

Key words

Periodic composites, asymptotic homogenization, variational principles, bounds, effective properties, imperfect contact.

Introducción

Numerosos compuestos de interés, tanto físico como tecnológico, presentan contacto imperfecto entre sus fases constituyentes. En la práctica, la adhesión entre las fases no satisface las condiciones de continuidad de la temperatura. En este trabajo se aborda el problema de estimar la conductividad térmica efectiva para compuestos que presentan resistencia térmica en la interfaz.

Las imperfecciones sobre la interfaz pueden afectar significativamente las propiedades efectivas de los materiales compuestos, ya que se encuentran en estrecho vínculo con la naturaleza del enlace entre las partículas de fases diferentes. La incorporación de los defectos internos y superficies con contacto imperfecto a la teoría general requiere la modificación y relajación de la continuidad de la temperatura entre los constituyentes. El contacto imperfecto describe un daño sobre la interfaz, en algunos casos, introducido deliberadamente con el fin de controlar la respuesta efectiva del material compuesto. También se presenta en el proceso de fabricación debido a las reacciones químicas entre las partículas de contacto y la matriz, o a un exceso en la carga termo-mecánica [1]. Mediante el control del comportamiento local de la interfaz, es posible controlar el comportamiento global del material compuesto, de ahí la importancia de su estudio.

Gran parte de la literatura se ha enfocado en el caso del contacto perfecto, en el cual se asume continuidad tanto de temperatura como de flujo sobre la interfaz. Para este tipo de compuestos, la descripción variacional de las propiedades efectivas se ha aplicado de forma exitosa, siendo uno de los trabajos más conocidos el de Hashin-Shtrikman [2], quienes obtuvieron las mejores cotas posibles para las propiedades efectivas de algunos compuestos elásticos lineales, basados en nuevos principios variacionales que fueron formulados en términos del tensor de polarización elástica. Desde entonces, varias cotas han sido propuestas para materiales de diferente naturaleza.

Aquí se ilustra cómo los problemas locales obtenidos vía método de homogeneización asintótica (MHA) pueden considerarse como punto de partida en la formulación de los principios variacionales establecidos en [3], para la estimación de propiedades efectivas en materiales bifásicos conductivos con contacto imperfecto; se combinan las cotas variacionales para su propiedad efectiva derivadas en [3], con la propiedad efectiva de compuestos con fibras huecas [7], y se hallan cotas variacionales más finas que las llamadas cotas elementales.

En la estructura del trabajo, una vez formulado el problema, se verifican las llamadas cotas elementales que luego se mejoran utilizando principios variacionales. Posteriormente, se realizan comparaciones con resultados derivados de la aplicación directa (vía numérica y analítica) del MHA. Se calcula el valor de las cotas para el caso de compuestos fibrosos bifásicos con fibras de sección transversal circular. Estas cotas dependen de las concentraciones volumétricas y las conductividades de ambas fases, así como de la constante de imperfección. Finalmente, se

realiza un breve análisis de la precisión de las cotas obtenidas.

1. Formulación del problema y principios variacionales

Se considera un medio heterogéneo constituido por inclusiones (con subíndice 2) en una matriz (con subíndice 1), siendo las inclusiones idénticas y distribuidas de forma periódica en la matriz. El medio está caracterizado por dos escalas de longitud, una macroscópica L , que es el tamaño de la muestra, y una microscópica l , del orden de las dimensiones del periodo local. El cociente $\varepsilon = l/L$ de estas escalas longitudinales se asume mucho menor que 1 ($\varepsilon \ll 1$). Un periodo local es un paralelepípedo $]0, \varepsilon[$ respecto a $x \in \mathbf{R}^3$, homotético, con radio ε , a un periodo básico $Y =]0, 1[$. $Y = Y_1 \cup Y_2$ con Y_2 rodeado por la parte Y_1 , complementaria de Y_2 en Y separadas por una interfaz Γ Lipschitz-continua. Se denota por \mathbf{n} al vector normal unitario exterior a Y_1 sobre ∂Y_1 . Se definen las concentraciones de volumen de cada fase: $c_1 = |Y_1|/|Y|$ y $c_2 = |Y_2|/|Y|$. Se asume que el medio aglutinador (la matriz) es un medio conductor, en vista de poder normalizar los resultados respecto a la propiedad del segundo medio.

Dado que cada medio es isótropo, cada fase está caracterizada por una constante positiva, a saber σ_i en la fase $Y_i, i = 1, 2$. Se considera el flujo de calor continuo en todo material y la existencia de una resistencia térmica sobre la superficie de contacto. Además, el salto que se produce en la temperatura es proporcional al flujo sobre la interfaz en términos de una constante positiva que caracteriza el tipo de imperfección. En lo que sigue, la expresión $[f(y)] = f_1(y) - f_2(y)$ denotará el salto de la función $f(y)$ entre dos fases con Γ como frontera común. En

el sentido clásico, el problema, en este caso, consiste en encontrar u que satisfice:

$$\nabla(\sigma(y)\nabla u) = f(x) \quad \text{en } Y_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\sigma_1 \Delta u^{(1)} \mathbf{n}^{(1)} = -\beta [u]_{\Gamma} \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2)$$

$$[\sigma(y)\Delta u \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (3)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (4)$$

Donde la función $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ representa la densidad de las fuentes de calor, \mathbf{n} es la normal exterior y u , la temperatura. El parámetro positivo β^{-1} representa la barrera de resistencia térmica, cuando $\beta = \infty$ se obtiene el caso del contacto perfecto y la condición (2) se transforma en $[u]_{\Gamma} = 0$.

Como resultado de la aplicación del MHA, la energía efectiva tiene la forma $\hat{\sigma} \cdot \xi = \int \sigma(y)(\nabla N + \xi) dy$, donde $\hat{\sigma}$ es el tensor de conductividad térmica efectivo, ξ es un vector real que cumple $N = N_i \xi_i$ y N_i representa la solución 1-periódica del i -ésimo problema local sobre la celda periódica Y . Se recurre a este problema local general equivalente que contiene la información de cada una de las soluciones N_i para el análisis del comportamiento de la energía:

$$\nabla(\sigma_i(\nabla N + \xi)) = 0 \quad \text{en } Y_i, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

$$[\sigma(y)(\nabla N + \xi)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (6)$$

$$(\sigma_1(\nabla N + \xi)) \cdot \mathbf{n} = -\beta [N] \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (7)$$

$$\langle N \rangle = 0, \quad (8)$$

$$N \text{ solución } Y - \text{periódica} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta ahora las condiciones de contacto y de periodicidad sobre Γ , se define

el siguiente espacio de funciones admisibles para la formulación variacional del problema local:

$$V_{adm} = \{v: v|_{Y_1} = v^{(1)} \in H^1(Y_1), v|_{Y_2} = v^{(2)} \in H^1(Y_2), v \text{ periódica sobre } Y, [v]_{\Gamma} = s \in \mathbf{R}\}, v \in V_{adm}$$

Donde $H^1(Y)$ es el espacio de todas las funciones, allí tanto la función como su derivada son de cuadrado integrable sobre Y .

Luego, el problema (5)-(9) equivale a encontrar $N \in V_{adm}$ que cumpla la relación integral

$$\int_{Y_1 \cup Y_2} \sigma \nabla N \nabla v \, dy + \int_{\Gamma} [N][v] \, ds = \int_{Y_1 \cup Y_2} \sigma \nabla v \xi \, dy, \quad \forall v \in V_{adm}. \quad (10)$$

La existencia y unicidad de la solución del problema anterior la garantiza la aplicación del teorema de Lax-Milgram; además, debido a que el operador en el miembro derecho de (10) es una forma simétrica, su solución satisface el problema de minimización.

$$\hat{\sigma} \xi \cdot \xi = \min_{N \in V_{adm}} \left\{ \int_Y \sigma(y) |\nabla N + \xi|^2 \, dy + \beta \int_{\Gamma} \|N\|^2 \, ds \right\}. \quad (11)$$

Para hallar otro principio variacional a partir de (11) pueden utilizarse los métodos de la teoría de la dualidad recogidos en [4], pero aquí se propone un enfoque de [5]. Considerando el dual convexo de cada uno de los términos del miembro izquierdo en (11) se obtiene:

$$\hat{\sigma} \xi \cdot \xi = \min_{N \in V_{adm}} \max_{\tau \in L^2(Y)} \max_{v \in L^2(\Gamma)} \left\{ 2 \int_Y \tau \cdot (\nabla N + \xi) \, dy - \int_Y \sigma^{-1}(y) \tau \cdot \tau \, dy \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\Gamma} v \cdot [N] \, ds - \beta^{-1} \int_{\Gamma} |v|^2 \, ds \right\}. \quad (12)$$

De intercambiar los operadores de maximización y minimización resulta que los vectores de prueba τ y v deben satisfacer

$$\min_{N \in V_{adm}} \left\{ \int_Y \tau \cdot \nabla N \, dy + \int_{\Gamma} v \cdot [N] \, ds \right\} > -\infty. \quad (13)$$

La integración por partes y la posterior aplicación del teorema de Lax-Milgram muestra que el problema de minimización en (13) equivale a las restricciones $\nabla \tau = 0$ en $Y_1 \cup Y_2$, $[\tau \cdot \mathbf{n}] = -v$ sobre Γ . La sustitución de las mismas en (12) junto a la identidad integral

$$\int_{Y_1 \cup Y_2} \nabla(\xi \cdot y \tau) \, dy - \int_{\partial Y} (\xi \cdot y) \tau \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Gamma} (\xi \cdot y) [\tau \cdot \mathbf{n}] \, ds, \quad (14)$$

resulta:

$$\hat{\sigma} \xi \cdot \xi \geq \sup_{(\tau, v)} \left\{ 2 \int_{\partial Y} \tau \cdot \mathbf{n} y \, ds - \int_Y \sigma^{-1}(y) \nabla(\nabla N + \xi) \, dy \right\}. \quad (15)$$

Si se considera $\bar{\tau} = \int_{\partial Y} \tau \cdot \mathbf{n} y \, ds$ y $\tilde{\tau} = \bar{\tau} - \tau$ se deduce de la fórmula del tensor de conductividad efectiva que $\bar{\tau} = \hat{\sigma} \xi$ o, lo que es lo mismo, $\hat{\sigma}^{-1} \bar{\tau} = \xi$, de lo cual se infiere que:

$$\hat{\sigma}^{-1} \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} \leq \min_{(\tilde{\tau}, v)} \left\{ \int_Y \sigma^{-1}(y) (\tilde{\tau} + \bar{\tau})(\tilde{\tau} + \bar{\tau}) \, dy + \beta^{-1} \int_{\Gamma} |v|^2 \, ds \right\}. \quad (16)$$

Si se considera $\tilde{\tau} + \bar{\tau} = \sigma(y)(\nabla N + \xi)$, $\xi = \hat{\sigma}^{-1} \bar{\tau}$ y $v = \beta [N]$, resulta que (16) cumple con las restricciones implícitas en (13). Por último, seleccionando v en (16) como $(\tilde{\tau} + \bar{\tau}) \mathbf{n}$, el principio variacional se representa de la siguiente forma:

$$\min_{\tilde{\tau} \in W} \left\{ \int_Y \sigma^{-1}(y) |\tilde{\tau} + \bar{\tau}|^2 dy + \beta^{-1} \int_{\Gamma} ((\tilde{\tau} + \bar{\tau}) \cdot n)^2 ds \right\}, \quad (17)$$

Donde W es el espacio infinito de las funciones $\tilde{\tau}$, Y -periódicas de cuadrado integrable tal que $\nabla \tilde{\tau} = 0$ en $Y_1 \cup Y_2$, $[\tilde{\tau}] \cdot n = 0$ sobre Γ , y $\int_Y \tilde{\tau} dy = 0$. $\bar{\tau}$ es un vector real constante.

2. Obtención de cotas

2.1 Cotitas elementales

En esta subsección se verá que las llamadas cotas clásicas o elementales no tienen en cuenta suficiente información microestructural, por esto, es usual emplearlas solo para controlar otros resultados más exactos que deben estar contenidos en el rango de comportamiento material definido por ellas. Estas pueden derivarse directamente de los principios variacionales (11) y (17).

Si se considera como función de prueba el vector constante N en (11) se deduce que $\hat{\sigma} \xi \cdot \xi \leq \int_Y \sigma |\xi|^2 dy$, luego, $\hat{\sigma} \leq (c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2) I$.

Mientras que para $\tilde{\tau} = 0$ en (17) resulta $\hat{\sigma}^{-1} \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} \leq \int_Y \sigma^{-1}(y) |\bar{\tau}|^2 dy + \beta^{-1} \int_{\Gamma} (\bar{\tau} \cdot n)^2 ds$,

de donde la cota inferior elemental es $\hat{\sigma} \geq \left(\frac{c_1}{\sigma_1} + \frac{c_2}{\sigma_2} + \frac{s}{\beta} \right) I$, siendo $s = \int_{\Gamma} ds$.

Cuando $\beta \rightarrow \infty$ se obtiene la cota inferior de Reuss $\langle \sigma^{-1}(y) \rangle^{-1}$, correspondiente al caso de contacto perfecto. La cota inferior contiene información de contacto imperfecto a diferencia de la cota superior. Además, esta última coincide con la correspondiente al caso del contacto perfecto (cota de Voigt).

2.2. Cota superior mejorada

La utilización de campos de prueba no constantes que consideren la estructura geométrica del compuesto conducen de forma natural a cotas más finas. Para el caso de inclusiones de conductividad σ_2 en una matriz de conductividad σ_1 , se considera una familia de funciones de prueba en (11) de la forma:

$$\tilde{N} = \begin{cases} (y - c_0) & \text{en la inclusión} \\ 0 & \text{en la matriz,} \end{cases} \quad (18)$$

Donde c_0 representa el centro de la inclusión. Como $\tilde{N} \in V_{adm}$, entonces para $c_0 = 0$ y η un vector constante, al sustituir (18) en (11) resulta:

$$\int_{Y_2} \sigma_2 |\eta + \xi|^2 dy + \int_{Y_1} \sigma_1 |\xi|^2 dy + \int_{\Gamma} \beta |y \cdot \eta|^2 ds, \quad (19)$$

Donde el vector óptimo tiene la forma $\eta^* = \frac{\xi}{1 + \beta \alpha / \sigma_2 c_2}$, siendo α un parámetro geométrico definido sobre la interfaz como

$\alpha = \int_{\Gamma} |y|^2 ds$. Al sustituir η^* en (19) se obtiene una nueva cota superior, más fina que la de Voigt, de la forma:

$$\hat{\sigma} \leq \left[c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{1 + \beta \alpha / c_2 \sigma_2} \right) \right] I. \quad (20)$$

La familia de funciones de prueba referida en (18) fue introducida por Hashin [6].

2.3 Cota inferior mejorada

2.3.1 Principio variacional inferior

En esta sección se hallará un principio variacional inferior para la elección de un compuesto de comparación a partir de (11). Se asume \tilde{N} como la solución del problema

(5)-(9), la cual representa el mínimo de la expresión descrita en (11). Sumando y restando en el miembro derecho de la expresión el término $\gamma |\nabla \tilde{N} + \xi|^2$, que representa la energía de un material de comparación con la misma estructura geométrica pero de conductividad $\gamma < \sigma_1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & (\hat{\sigma} - \gamma I) \xi \cdot \xi = \int_Y (\sigma(y) - \gamma) |\nabla \tilde{N} + \xi|^2 dy + \\ & \gamma \int_Y |\nabla \tilde{N}|^2 dy + 2\gamma \int_Y \nabla \tilde{N} \cdot \xi dy + \beta \int_{\Gamma} [\tilde{N}]^2 ds. \end{aligned} \quad (21)$$

De la aplicación del teorema de Gauss-Ostrogradsky se obtiene:

$$\int_Y \nabla \tilde{N} \cdot \xi dy = \int_{\Gamma} \|\tilde{N}\| \mathbf{n} \cdot \xi ds, \quad (22)$$

y sustituyendo la fórmula (22) en (21), se deduce:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) ds \right) \xi \cdot \xi = \\ & \int_Y (\sigma(y) - \gamma) |\nabla \tilde{N} + \xi|^2 dy + \gamma \int_Y |\nabla \tilde{N}|^2 dy + \\ & \beta \int_{\Gamma} \left([\tilde{N}] + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{n} \cdot \xi \right), \end{aligned} \quad (23)$$

Donde se usó la identidad $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})(\mathbf{n} \cdot \xi) = (\mathbf{n} \cdot \xi) \mathbf{n}$. Luego, para toda función Y -periódica p de cuadrado integrable en Y , y v de cuadrado integrable sobre Γ se tienen los estimados:

$$\left[(\sigma(y) - \gamma)^{1/2} |\nabla \tilde{N} + \xi| - p(\sigma(y) - \gamma)^{-1/2} \right] \geq 0, \quad (24)$$

$$\left([\tilde{N}] + \frac{\gamma}{\beta} \mathbf{n} \cdot \xi - \frac{v}{\beta} \right)^2 \geq 0. \quad (25)$$

La integración sobre Y de (24) y la de (25) sobre Γ no afecta la validez de las desigualdades. Introduciendo la notación \mathcal{P} para el conjunto de todos los pares (p, v) , de la aplicación de (24) y (25) a (23) se garantiza que:

$$\left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) ds \right) \xi \cdot \xi \geq \underline{\mathcal{L}}(p, v, \tilde{N}),$$

Donde $\underline{\mathcal{L}}$ es el lagrangiano

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}}(p, v, \tilde{N}) &= 2 \int_Y p \cdot \xi dy + \frac{2\gamma}{\beta} \int_{\Gamma} \mathbf{v} \mathbf{n} \cdot \xi ds \\ &\quad - \int_Y |p|^2 (\sigma(y) - \gamma)^{-1} dy - \frac{1}{\beta} \int_{\Gamma} |v|^2 ds \\ &\quad + 2 \int_Y p \cdot \nabla \tilde{N} dy + 2 \int_{\Gamma} v [\tilde{N}] ds - \gamma \int_{\Gamma} |\nabla \tilde{N}|^2 ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Nótese que:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) ds \right) \xi \cdot \xi \geq \underline{\mathcal{L}}(p, v, \tilde{N}) \\ & \geq \min_{N \in V_{adm}} \underline{\mathcal{L}}(p, v, N) = \underline{\mathcal{L}}(p, v, N^*) \end{aligned} \quad (27)$$

en la cual N^* representa el ínfimo de:

$$\inf_{\tilde{N} \in V_{adm}} \left\{ 2 \int_Y p \cdot \nabla \tilde{N} dy + 2 \int_{\Gamma} v [\tilde{N}] ds + \gamma \int_Y |\nabla \tilde{N}|^2 ds \right\}. \quad (28)$$

Además puede verificarse que N^* es solución del siguiente problema:

$$-\gamma \Delta \tilde{N} = \nabla p \quad \text{en } Y_1 \cup Y_2, \quad (29)$$

$$[\gamma \nabla \tilde{N} + p] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (30)$$

$$(\gamma \nabla \tilde{N} + p) \cdot \mathbf{n} = -v \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (31)$$

Como la ecuación principal y las condiciones de contacto son lineales respecto a (p, v) , en (29)-(31), se considera $\tilde{N} = N^p + N^v$, donde N^p es la solución del siguiente problema:

$$-\gamma \Delta N^p = \nabla p \quad \text{en } Y_1 \cup Y_2, \quad (32)$$

$$[\gamma \nabla N^p + p] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (33)$$

$$(\gamma \nabla N^p + p) \cdot n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (34)$$

Mientras que N^v es una función de cuadrado integrable definida sobre Γ , que es solución de:

$$-\gamma \Delta N^v = \nabla p \quad \text{en } Y_1 \cup Y_2, \quad (35)$$

$$[\gamma \nabla N^v] \cdot n = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (36)$$

$$(\gamma \nabla N^v) \cdot n = -v \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (37)$$

Y puede hallarse la solución para cada fase, tanto de (32) – (34), como de (35) – (37). Si se consideran los operadores lineales M y R tal que:

$$M p = \nabla N^p \quad \text{sobre } Y_i, \quad i = 1, 2, \quad (38)$$

$$R v = \nabla N^v \quad \text{sobre } Y_i, \quad i = 1, 2, \quad (39)$$

La relación (27) puede ser reescrita como la desigualdad variacional:

$$\left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (n \otimes n) ds \right) \xi \cdot \xi \geq \underline{\mathcal{L}}(p, v, \tilde{N}) \geq 2\underline{\mathcal{L}}(\xi, p, v) - \underline{\mathcal{Q}}(p, v), \quad (40)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}}(\xi, p, v) &= \frac{\gamma}{\beta} \int_Y v \xi \cdot n ds + \int_Y (p \cdot \xi) dy, \text{ y} \\ \underline{\mathcal{Q}}(p, v) &= \int_Y (\sigma(y) - \gamma)^{-1} |p|^2 dy \\ &+ \frac{1}{\beta} \int_{\Gamma} |v|^2 ds + \gamma \int_Y |M p + R v|^2 dy. \end{aligned}$$

Se observa que para funciones $p = (\sigma(y) - \gamma)(\nabla \tilde{N} + \xi)$ y $v = \beta [\tilde{N}]$ se satisface (40) para la igualdad, por lo cual se establece el principio variacional:

$$\left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (n \otimes n) ds \right) \xi \cdot \xi = \max_{(p,v) \in \mathcal{P}} \{ 2\underline{\mathcal{L}}(\xi, p, v) - \underline{\mathcal{Q}}(p, v) \}. \quad (41)$$

De (40) y (27), resulta:

$$\begin{aligned} &\left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (n \otimes n) ds \right) \xi \cdot \xi = \\ &\max_{(p,v) \in \mathcal{P}} \min_{N \in V_{adm}} \{ 2\underline{\mathcal{L}}(\xi, p, v) - \underline{\mathcal{Q}}(p, v) \} \\ &= \min_{N \in V_{adm}} \max_{(p,v) \in \mathcal{P}} \{ 2\underline{\mathcal{L}}(\xi, p, v) - \underline{\mathcal{Q}}(p, v) \}. \end{aligned}$$

La interpretación física del límite $\beta \rightarrow \infty$ corresponde al caso de contacto perfecto en el cual no existe resistencia en la superficie de contacto. Para este caso el nuevo principio variacional (41) se reduce al de [6].

2.3.2 Cota inferior

En esta sección se aplica el principio variacional (41) con el fin de obtener cotas inferiores más finas para el tensor de conductividad. Las cotas halladas se presentan en términos de la fracción volumétrica, el área de la superficie s y de una matriz cuyos coeficientes constituyen la conductividad efectiva de un compuesto con contacto perfecto y la misma microgeometría que el compuesto de estudio. Se consideran inclusiones (fase 2) en una matriz (fase 1) con $\sigma_2 > \sigma_1$, donde las inclusiones no intersecan la frontera del compuesto.

Para hallar una mejor cota inferior se eligen las funciones p y v en (41) de la siguiente forma: $p = \chi_2(y) \mu$, $v = r \cdot n$ donde $\chi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{sobre } Y_1 \\ 1 & \text{sobre } Y_2 \end{cases}$, donde μ y r son vectores constantes de \mathbf{R}^s y n es la normal exterior a Y_1 . De lo anterior se infiere la cota inferior asociada a los valores prefijados:

$$\left(\hat{\sigma} - \gamma I + \frac{\gamma^2}{\beta} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) ds \right) \xi \cdot \xi = \max_{\substack{\mu \in \mathbb{R}^s \\ r \in \mathbb{R}^s}} \left\{ 2\underline{L}(\xi, \chi_2 \mu, r \cdot \mathbf{n}) - \underline{Q}(\chi_2 \mu, r \cdot \mathbf{n}) \right\}. \quad (42)$$

Se considera la conductividad $\gamma = \sigma_1$ con el fin de la comparación, entonces la formulación explícita para \underline{L} y \underline{Q} es:

$$\underline{L} = \frac{\sigma_1}{\beta} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} ds \xi \cdot r + c_2 \xi \cdot \mu, \quad (43)$$

$$\underline{Q} = c_2 (\sigma_2 - \sigma_1)^{-1} |\mu|^2 + \frac{1}{\beta} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} ds r \cdot r + \sigma_1^{-1} \left(c_2 |\mu|^2 + 2c_2 \mu \cdot r + (I - m_0) r \cdot r \right). \quad (44)$$

En la expresión anterior la matriz simétrica m_0 es el tensor de conductividad efectiva de un compuesto con la misma estructura geométrica que el original pero con inclusiones vacías. La región Y_1 representa un conductor isótropo de conductividad σ_1 , mientras que Y_2 es perfectamente aislante, es decir, $\sigma_2 = 0$. Para cualquier vector constante ξ la conductividad efectiva se define $m_0 \xi \cdot \xi = \inf_{N \in H^1} \int_{Y_1} \sigma_1 |\nabla N + \xi|^2 dy$.

La expresión (43) para \underline{L} y los dos primeros términos en (44) se obtienen directamente de la sustitución en (41) de las funciones elegidas para p y v , mientras que los términos restantes de \underline{Q} resultan de la resolución de los problemas auxiliares (32)-(34) y (35)-(37), y de la evaluación del término no local en la forma cuadrática $\underline{Q}(p, v)$.

La necesidad de analizar los valores μ y r para los cuales la expresión (42) alcanza su valor máximo se convierte ahora en motivación fundamental. De la condición necesaria para la existencia de extremo, se tiene, para cualquier gradiente de temperatura ξ constante, que:

$$\begin{aligned} & (\hat{\sigma} - \sigma_1 I + \sigma_1^2 B) \xi \cdot \xi \geq \\ & \begin{pmatrix} c_2 (\sigma_2 / \sigma_1) (\sigma_2 - \sigma_1)^{-1} I & c_2 \sigma_1^{-1} I \\ c_2 \sigma_1^{-1} I & B + \sigma_1^{-1} (I - m_0) \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} c_2 \xi \\ \sigma_1 B \xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_2 \xi \\ \sigma_1 B \xi \end{pmatrix}. \quad (45) \end{aligned}$$

En medios isótropos $B = \frac{s}{\beta} I$, donde s es la longitud de la inclusión. La desigualdad (45) se convierte en la cota inferior para la conductividad efectiva para compuestos fibrosos macroscópicamente isótropos dada por $\hat{\sigma}_{ii} \geq \sigma_1 - \sigma_1 \left((1 - m_0)^{-1} + (\sigma_1 c_2 \theta)^{-1} \right)^{-1}$, donde θ representa la combinación característica $\theta = \frac{s}{c_2 \beta} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 \sigma_1}$, y m_0 constituye la conductividad efectiva de un compuesto con la misma geometría, con inclusiones no conductoras en una matriz de conductividad 1.

3. Cálculo de las cotas variacionales en inclusiones circulares

En esta sección se utilizarán los resultados obtenidos en las secciones anteriores para la acotación de la propiedad efectiva en el caso de compuestos bifásicos con fibras de sección transversal circular. Primero, se plantean las expresiones de las cotas y segundo, se desarrolla un análisis de su comportamiento basado en la comparación con otros resultados reportados en la literatura. Las concentraciones en este caso son $c_2 = \pi r^2$ y $c_1 = 1 - \pi r^2$, mientras que $2\pi r^3$. Sustituyendo en las fórmulas obtenidas para las nuevas cotas resulta:

$$\begin{aligned} & \sigma_1 - \left((1 - m_0)^{-1} + (\sigma_1 \pi r^2 \theta)^{-1} \right)^{-1} \leq \sigma^e \leq \sigma_1 \\ & (1 - \pi r^2) + \pi r^2 \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{1 + 2\beta r / \sigma_2} \right), \end{aligned}$$

donde $\theta = \frac{2}{r\beta} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2\sigma_1}$.

4. Análisis de los resultados

Una vez normalizadas las cotas respecto a la propiedad de la matriz σ_1 , las expresiones resultantes dependen de β y del cociente de σ_1 y σ_2 . Hecha esta observación es conveniente tomar $\lambda = \sigma_2 / \sigma_1$, para simplificar la notación.

Para los diferentes valores de la cota inferior más fina se considera en calidad de m_0 la expresión de \hat{A}_{11}^0 reportada en la fórmula (39) de [7], con un segundo orden de truncamiento en el producto de vectores y matriz de orden infinito allí involucrada.

Con el objetivo de desarrollar comparaciones con otros resultados reportados en [8],

se introduce el llamado número de Biot (Bi), $Bi = \beta d / \sigma_1$ y d representa el diámetro real de la fibra. Con este fin, se plantean las siguientes modificaciones para las cotas normalizadas respecto a σ_1 :

Cotas elemental: $\left(c_1 + \frac{c_2}{\lambda} + \frac{4c_2}{Bi} \right)^{-1}$

Cotas inferior mejoradas:

$$1 - \left((1 - m_0)^{-1} + \left(\frac{4c_2}{Bi} - c_2 \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) \right)^{-1} \right)^{-1}$$

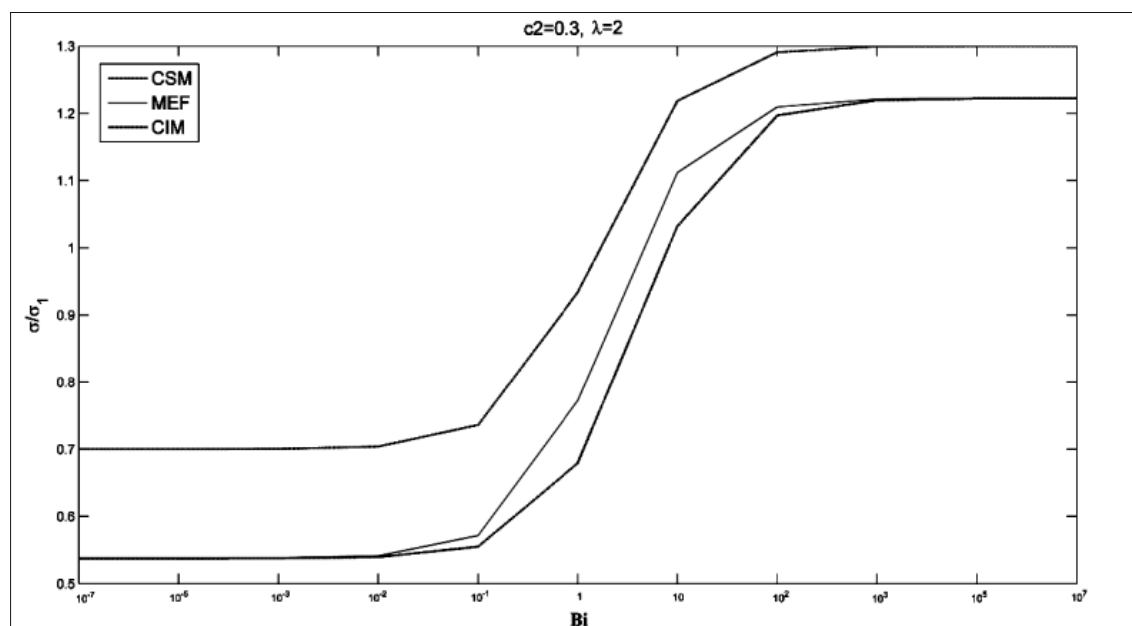
Cotas superior mejoradas:

$$c_1 + c_2 \lambda \left(1 - \frac{1}{1 + Bi / \lambda} \right)$$

Cotas superior elemental: $1 + c_2 (\lambda - 1)$

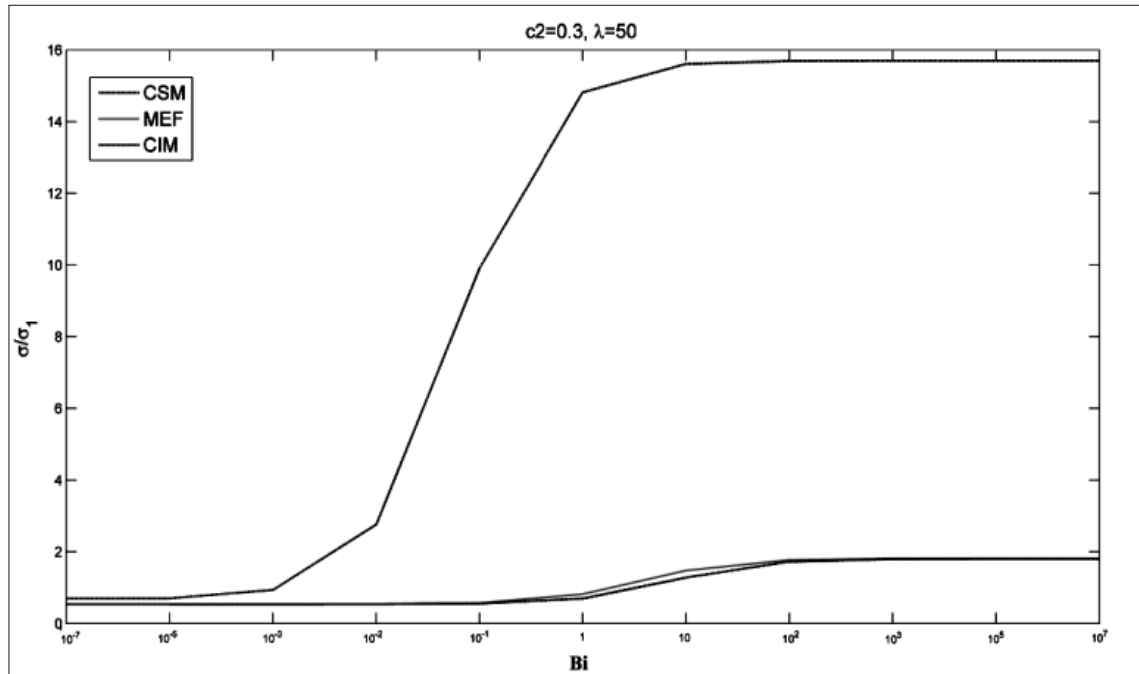
En la figura 1, las cotas halladas son satisfactorias para predecir la conductividad efectiva cuando la proporción entre las propiedades

Figura 1. Comportamiento de las cotas mejoradas y de la propiedad efectiva versus la variación número de Biot para $c_2 = 0.3$ y $\lambda = 2$



Fuente: elaboración propia.

Figura 2. Comportamiento de las cotas mejoradas y de la propiedad efectiva versus la variación número de Biot para $\zeta_2 = 0.3$ y $\lambda = 50$



Fuente: elaboración propia.

de los medios componentes es pequeña. La cota inferior adopta valores muy similares a los presentados en [8], incurriendo en un error menor al 12,1%, mientras que la superior se mantiene en un rango de 6,4% a 30,2%, siendo mayor el error para β muy pequeño. En la figura 2, la cota inferior se mantiene entre 0,00003% y 15,0%, pero la cota superior se separa considerablemente de los resultados en [8] para potencias superiores a -1 de β .

La figura 3 muestra que para $\lambda = 2$ la cota inferior se encuentra próxima a los valores obtenidos por [8] con un error entre 6,1% y 11,2%, pero la superior tiene un comportamiento similar solo para $Bi = 10^i, i \leq 1$.

En figura 4, se aprecia que no ocurre lo mismo arriba para $\lambda = 50$, pues las discrepancias aumentan considerablemente para $Bi = 10^i, i \geq 1$. La cota inferior llega a incurrir hasta en un 55,8% de error y puede afirmarse que, para este caso, la cota superior es bastante pobre.

5. Conclusiones

En este trabajo se justifica matemáticamente la conexión existente entre el MHA y las formulaciones variacionales derivadas a partir de modelos micromecánicos de homogeneización. Se dedujeron cotas para la propiedad efectiva de medios conductivos bifásicos, macroscópicamente isótropos provistos de

Figura 3. Comportamiento de las cotas mejoradas y de la propiedad efectiva versus la variación número de Biot para $c_2 = 0.75$ y $\lambda = 2$

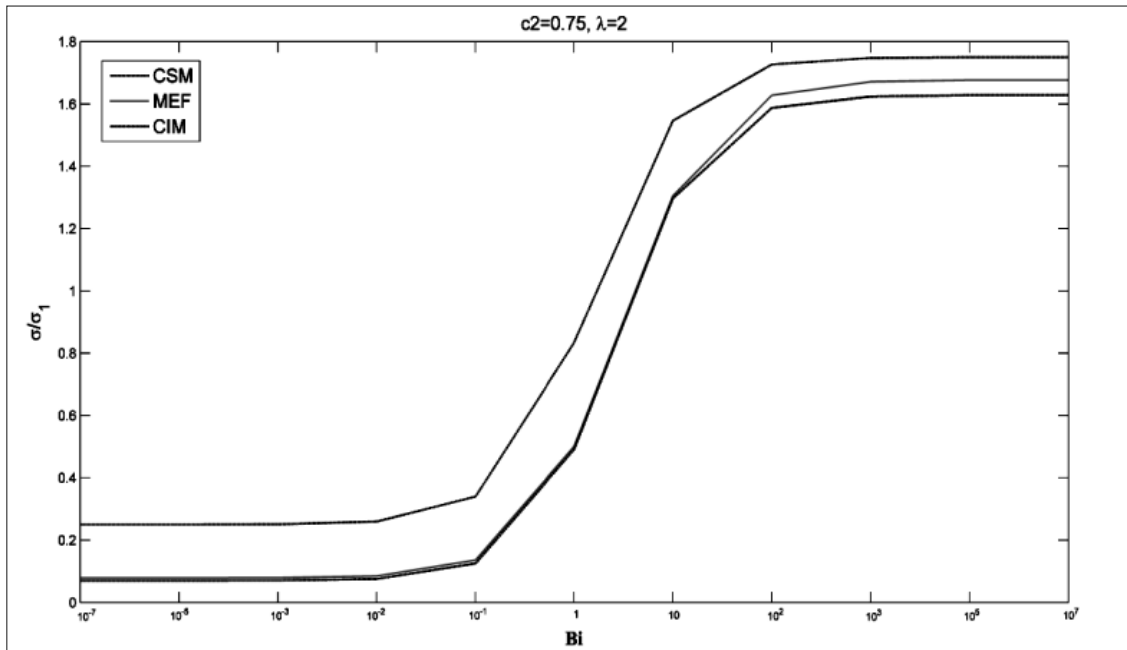
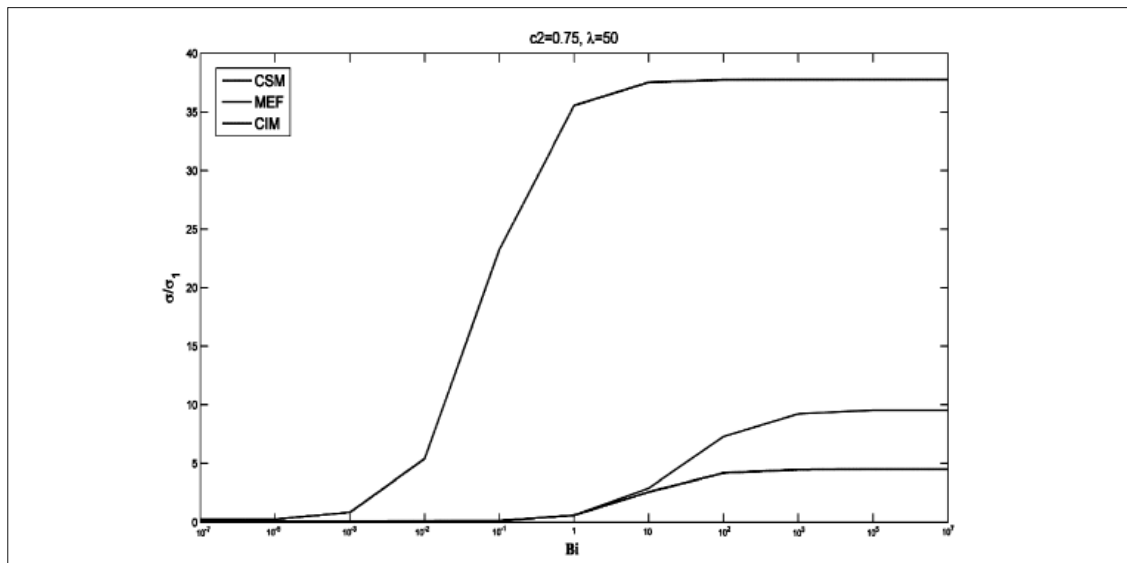


Figura 4. Comportamiento de las cotas mejoradas y de la propiedad efectiva versus la variación número de Biot para $c_2 = 0.75$ y $\lambda = 50$



Fuente: elaboración propia.

una estructura periódica y resistencia sobre la interfaz de tipo “resorte”, a partir de la formulación de principios variacionales asociados a la formulación débil de los problemas sobre la celda periódica. Para una cota inferior más fina se combinaron principios variacionales del tipo Lipton [3] con predicciones efectivas directas obtenidas para compuestos conductivos porosos [6].

Las fórmulas halladas pueden ser útiles para corregir los cálculos numéricos y las estrategias para su implementación computacional. Se plantearon comparaciones con resultados reportados en la literatura como forma de validación de la investigación desarrollada, lo cual evidenció que las cotas obtenidas son, por lo general, bastante cercanas cuando se tiene bajas concentraciones de las inclusiones, y que la cota inferior, generalmente, es mucho más eficiente para la predicción del valor del tensor efectivo.

Referencias

- [1] S. Nie, C. Basaran, “A micromechanical model for effective elastic properties of particulate composites with imperfect interfacial bonds”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 79-91, 2005.
- [2] Z. Hashin, S. Shtrikman, “A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, pp. 343-352, 1962.
- [3] R. Lipton, B. Vernescu, *Composite with imperfect interface*. London: *Proc. Soc. Lond.*, A 452, pp. 329-358, 1996.
- [4] I. Ekeland, R. Teman, *Convex analysis and variational problems*. Amsterdam: North-Holland, 1976.
- [5] R. Lipton, “Heat conduction in fine scale mixtures with interfacial contact resistance”, in *SIAM Journal Appl. Math*, vol. 58, pp. 55-72, 1998.
- [6] Z. Hashin, “Extremum principles for elastic heterogeneous media with imperfect interfaces and their application to bounding of effective moduli”, in *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 40, pp. 767-781, 1992.
- [7] J. Bravo, R. Guinovart, G. López, R. Rodríguez, y F. J. Sabina, “Acerca de la homogeneización y propiedades efectivas de compuestos conductivos”, *Revista Visión Electrónica*, año 7, nº 1, 2013.
- [8] R. P. A. Rocha, y M. E. Cruz, “Computation of the effective conductivity of unidirectional fibrous composites with an interfacial thermal resistance. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications”, in *International Journal of Computation and Methodology*, vol. 39, nº 2, pp. 179-203, 2001.