

Una aproximación a la relación entre objeto matemático y sentidos ¹

An approach to the relation between mathematical object and senses

Pedro J. Rojas G.²

*[...] para que pueda ser he de ser otro
Salir de mí, buscarme entre los otros,
los otros que no son si yo no existo,
Los otros que me dan plena existencia [...]*
Octavio Paz

[Poema Piedra del Sol, México, 1957]

Resumen

Se presenta una revisión de trabajos realizados sobre la relación entre objeto matemático y sentidos asignados a dichos objetos. Este trabajo se sitúa en un contexto semiótico y estudia de manera general la relación semiosis-noesis en la construcción de conocimiento matemático; estudio que, sin ser exhaustivo, incluye aspectos sobre la actividad matemática, la comunicación sobre objetos matemáticos emergentes y el aprendizaje de los objetos matemáticos.

Abstract

This article is a review of studies on the relationship between mathematical object and the senses assigned to those objects. This work is located in semiotic context and studies in general the relationship semiosis-noesis in the construction of mathematical knowledge. Studies which without be exhaustive, includes aspects of mathematical activity, the communication on emerging mathematical objects and the learning mathematical objects.

Palabras clave:

Representación, registro semiótico, objeto matemático, sentido, significado

Key words:

Representation, Semiotic Register, Mathematical Object, Sense, Meaning

- 1 Incluye antecedentes del proyecto de tesis doctoral que desarrolla el autor, titulado "Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación entre representaciones semióticas", como estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital, bajo la dirección del Doctor Bruno D'Amore de la Universidad de Bologna (Italia).
- 2 Licenciado en Matemáticas, Magíster en Matemáticas. Profesor adscrito a la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia. Integrante del Grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares-Universidad Distrital) y del Grupo NRD (Nucleo di Ricerca Didattica Universidad de Bologna). E-mail: pedroedumat@udistrital.edu. co.

Introducción

Los seres vivos, particularmente los seres humanos, reconocen la importancia de la comunicación en la vida social. Entre las diversas formas de comunicación, además de las que usan los lenguajes naturales, están la visual, la táctil, la sonora, la gestual, y en cada una de ellas requerimos el uso de signos —ya sea emisión de sonidos, “manchas” sobre un papel, gestos, entre otros— que se asumen, y son asumidos por otros, como dotados de algún significado; aunque se reconozca que en ocasiones tales significados no necesariamente son compartidos. Los signos son usados para referir algo en el mundo —cosas, sentimientos, ideas, entre otros—, en un cierto contexto y con un cierto sentido.

La semiótica precisamente hace referencia a la disciplina que estudia los signos en general, o mejor, que estudia los sistemas de signos y está ligada a una intención comunicativa. En principio el signo puede ser visto como todo aquello que, para un sujeto, está o hace las veces de otra cosa —el objeto del signo—, aunque no en todos sus aspectos, sea que dicha cosa “exista” o no. El origen de la semiótica se asocia a De Saussure y a Peirce,³ hacia finales del siglo XIX.

Para De Saussure, cuyo interés fundamental fue el estudio y comprensión de la lengua, la semiología es la ciencia que estudia los signos en el seno de la vida social —en qué consisten y qué reglas los rigen—. Los signos, vistos como unión de dos elementos de naturaleza psíquica: significado —identificado con concepto— y significante —identificado con “imagen” producida por la sucesión de

sonidos o marcas gráficas—,⁴ permiten expresar ideas que un “emisor” comunica a un “destinatario” y no pueden verse como simples “marcas” ni por fuera de un sistema; así, como se mencionó anteriormente, De Saussure asume una visión estructuralista (Radford, 2006a, p. 8).

Para Peirce, dice Eco (1986, p. 20), la semiótica es “la doctrina de la naturaleza esencial y de las variedades fundamentales de semiosis posibles; entendiendo por semiosis “una acción, una influencia, la cual es, o involucra, una cooperación de tres aspectos, tales como un signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no es de ninguna manera resoluble en acciones entre pares”⁵

Desde este enfoque, afirma Castañares (2000, p.5), y a diferencia de la semiótica saussuriana, no se establece un vínculo entre semiótica y lingüística. En la semántica persiana los signos están conectados unos con otros, y es gracias a esta comunicabilidad que puede haber representación. Este autor reconoce además que “nuestra experiencia de la realidad se nos da ya ”semiotizada”, es decir, inserta en los procesos de semiosis”.

Eco (1986, pp. 26, 28), considera más amplia la definición de semiótica dada por Peirce y plantea que actualmente las investigaciones en este campo son muchas y de múltiples tipos, asociadas a sistemas de comunicación “naturales” o “espontáneos” y a otros considerados culturales. Por ejemplo, la comunicación táctil, la comunicación entre animales, los códigos musicales, los lenguajes formales y los lenguajes naturales; para este autor “todos los fenómenos de cultura pueden convertirse en objetos

3 Si bien el término utilizado por De Saussure fue semiología y no semiótica, usualmente son considerados términos equivalentes; sin embargo, en la actualidad, estos términos podrían hacer referencia a dos disciplinas diferenciadas; así, mientras la semiótica asume explícitamente una intención comunicativa, para lo cual requiere contar con sistemas de signos —se interesa más por lo interpretativo—, la semiología no se preocupa por si existe o no tal intención comunicativa sino por las estructuras semióticas —se interesa más por lo estructural—.

Charles Sanders Peirce (1839–1914), lógico y filósofo estadounidense.

Ferdinand de Saussure (1857–1913), lingüista suizo.

4 Como lo afirma Castañares (1985, p. 372), el “significante” podría ser asociado, desde el punto de vista triádico, con signo, pero considera que la identificación entre significado y concepto es, por lo menos, reduccionista, en tanto el significado puede ser entendido, desde el punto de vista triádico, más como un interpretante.

5 La semiosis vista como proceso de significación, en decir, como objeto de estudio de la semiótica. así, puede entenderse por semiosis cualquier tipo de proceso o actividad que involucre signos. por su parte, duval (1999, p. 14), llama semiosis a la “aprehensión o producción de una representación semiótica” y llama noesis a los “actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia”.

de comunicación [...] una semántica desarrollada no puede ser otra cosa que el estudio de todos los aspectos de la cultura vistos como significados que los hombres se van comunicando paulatinamente” y plantea que la semiótica estudia todos los procesos culturales como procesos de comunicación.⁶

Por su parte, Radford (2006a), plantea que además de las dos tradiciones semióticas antes referidas, estaría una tercera representada por Vygotski (2001, p. 11),⁷ quien pone de relieve el papel de lo social en la génesis de la significación, planteando que “el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su internalización”

Algunas ideas sobre representación

En contextos de la vida cotidiana, y en algunos campos de conocimiento científico, es posible acceder a los objetos directamente mediante la percepción o la utilización de instrumentos, sin necesidad de acudir a representaciones de tales objetos; en otros campos de conocimiento, por el contrario, el acceso vía representaciones no sólo resulta útil sino casi obligatorio.

Las representaciones de los objetos son producidas haciendo uso de sistemas de representación de diferente naturaleza. Tales sistemas de representación, como lo afirma Duval (2004, p. 17), pueden ser no semióticos —redes neuronales, como las diferentes formas de memoria, o instrumentos físicos, como microscopios y telescopios—, o pueden ser semióticos —por medio de signos—. La producción de una representación semiótica, necesariamente, es intencional.

El estudio de aspectos relacionados con la semiótica ha sido abordado en y desde campos y disciplinas diversas; particularmente, se ha avanzado en el es-

6 Para eco el significado de un término no es otra cosa que una “unidad cultural” (p. 61), entendiéndolo por unidad algo que está definido culturalmente y que se distingue como entidad.

7 Lev Semiónovich Vygotski (1896–1934), psicólogo ruso —actualmente se diría bieloruso—.

tudio de los sistemas semióticos de representación específicos de las disciplinas, reconociendo por supuesto al lenguaje natural como sistema semiótico por excelencia⁸ Duval (2004), destaca la existencia de tres polos constitutivos de toda representación y hace explícito que la relación entre estos puede variar dependiendo de si el sistema productor de la representación es o no semiótico:

- el objeto representado
- el contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular presenta del objeto
- la “forma” de la representación, es decir, su modalidad o su registro (p. 16).

Para este autor (1999), en tanto toda iniciación en las matemáticas pasa por una apropiación individual de sistemas semióticos de representación específicos,⁹ se hace importante abordar semióticamente la comunicación.

En los últimos años se han retomado con cierta fuerza los estudios sobre representaciones semióticas y sus relaciones con el funcionamiento cognitivo; entre estos estudios se destacan los desarrollados por Duval (1999, 2004) en el campo de la didáctica de las matemáticas. D’Amore (2006a, p. 272), haciendo referencia a dicho autor, plantea que “sus análisis están obligando a reflexionar de un modo nuevo a todo aparato cognitivo puesto en acción en el acto del aprendizaje de la matemática”.

8 De acuerdo con Duval (1999), si bien la clasificación de los signos en íconos, símbolos e índices —realizada por Peirce— fue importante para fundamentar la semiótica, resultó muy general para permitir resaltar las características propias de la lengua natural. Fue Benveniste, a principios de la década de 1970, quien reconoció explícitamente la importancia de relacionar los diversos sistemas semióticos y orientó su trabajo a mostrar que la lengua natural es “la organización semiótica por excelencia” (p. 29); sin embargo, “no estuvo interesado ni en el papel de la diversidad de los sistemas semióticos en el funcionamiento del pensamiento, ni en la complejidad de la conversión de las representaciones de un sistema a otro” (p. 30).

9 Cada sistema semiótico “comporta reglas, más o menos explícitas, que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también un sentido [...] algunos sistemas pueden ser más exigentes que otros” (Duval, 2004, pp. 43-44).

Registros de representación semiótica

Si existe un interés de comunicar, resulta importante contar con diversos sistemas semióticos de representación y con posibilidades de ponerlos en correspondencia. Duval (1999, p. 30) centra su interés en los sistemas que posibilitan transformar una representación semiótica en otra representación semiótica, lo cual resulta esencial para el progreso de conocimientos en matemáticas. Este autor denomina registros de representación semiótica precisamente a los sistemas semióticos de representación que permiten que se cumplan “las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación”

1. Constitución de una representación.
2. Transformación de una representación al interior del sistema.
3. Transformación de una representación de un sistema a otro.

Así, por ejemplo, el sistema de códigos de tránsito es un sistema semiótico de representación, pero no es un registro; mientras que el lenguaje natural, el lenguaje algebraico y el lenguaje figural, son sistemas que permiten cumplir las tres actividades cognitivas y, por tanto, son registros de representación semiótica.

Aunque en los trabajos en didáctica no siempre se resalta la importancia de la primera de estas tres actividades cognitivas, desde un punto de vista sociocultural la elección de un determinado registro para representar reviste de gran importancia, pues quien quiere comunicar algo debe decidir qué registro le posibilita resaltar lo que él desea poner en relieve de ese algo, hecho que orienta la elección de uno y no otro registro (D'Amore, 2005), y tal elección depende de la comunidad en la cual se está trabajando, pues habría una cierta relatividad de los registros dependiendo del nivel de refinación de dicha comunidad. Por ejemplo, en una comunidad las representaciones usadas para números decimales, fracciones o porcentajes podrían corresponder a diferentes registros, mientras que para otra podrían corresponder a un mismo registro, el del lenguaje aritmético.

Incluso, dependiendo de la situación, de los objetivos de la misma, una misma persona podría asumir un registro más o menos amplio.

Ahora bien, desde los planteamientos de Duval (1999, p. 28), como ya se mencionó anteriormente, en la actividad cognitiva las representaciones semióticas cumplen tanto la función de comunicación, como las de “tratamiento de la información y de objetivación o toma de conciencia” estas representaciones, pues, no se constituyen en un simple “soporte para las representaciones mentales”. Para este autor, no puede separarse el contenido representado de la forma que lo representa, pues reconoce que la semiosis, en tanto proceso de aprehensión o producción de una representación realizada por medio de signos, no es independiente de la noesis, entendida como proceso de aprehensión conceptual de un objeto (p. 29).

Objeto matemático y mediación semiótica

Plantea Duval (2004, p.20) que, en tanto todo conocimiento matemático debe servirse de representaciones y movilizar una variedad de sistemas semióticos de representación de sus objetos, resulta prioritaria la dupla —signo, objeto—, o mejor la dupla —representación semiótica, objeto—. Así, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes requieren apropiarse de dicha variedad de sistemas semióticos de representación y, en especial, de las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra. Tales transformaciones se dan tanto al interior de un mismo sistema semiótico de representación, como entre diferentes sistemas semióticos; transformaciones que Duval denomina tratamiento y conversión, respectivamente.

Ejemplos de transformaciones entre representaciones semióticas tipo tratamiento son los cálculos realizados al interior del sistema de escritura decimal, utilizando solamente las reglas propias de este sistema de escritura de los números. Como ejemplo de una transformación tipo conversión, puede mencionarse la que permite pasar de la representación “: : :”, en el sistema gráfico de representación,

a la representación “6”, en el registro de escritura numérica. En este caso, propiedades del objeto que pueden ser explícitas en una representación —por ejemplo, la descomposición en grupos de dos o de tres—, pueden no serlo en la otra, es decir, el contenido de cada representación cambia en tanto cambie el sistema en el que se produce. Se reconoce así que, como lo afirma Duval, (2004, p.45) “lo que la representación hace presente del objeto no depende del objeto sino del sistema que produce la representación”.

En matemáticas, en particular, el aprendizaje de los objetos es conceptual;¹⁰ el sujeto no entra en “contacto” directo con los objetos, pues estos no son accesibles perceptual ni instrumentalmente. En tanto no son posibles las referencias ostensivas, se hace necesario servirse obligatoriamente de representaciones.¹¹ En palabras de Duval, (2004, p.18) “[la] mediación semiótica es tan indispensable en matemáticas como la mediación instrumental para la observación de los fenómenos”. Sin embargo, en tanto en los procesos de aprendizaje el acceso a un objeto matemático se realiza vía una de sus representaciones, como es usual, es posible que se generen dificultades si no se toma conciencia o no se hace explícita la diferencia entre el objeto y la representación mediante la cual se “accede” a él, pues podría suceder que el objeto sea confundido con una representación específica de éste.

Problemáticas asociadas con la mediación semiótica

Es necesario llamar la atención sobre un hecho que en principio resulta paradójico, el cual fue reconocido explícitamente por Duval en 1995: ¿Cómo se explica que la actividad sobre los objetos matemáticos sólo sea posible mediante representaciones semióticas, si el aprendizaje de los objetos matemáticos es un aprendizaje conceptual? En otras

10 Para Duval, la adquisición conceptual de un objeto pasa por adquirir representaciones semióticas, esto es, representaciones por medio de signos.

11 Estas representaciones pueden ser discursivas —usando lenguas naturales o lenguas formales—, o pueden ser no discursivas —mediante figuras geométricas o grafos cartesianos—.

palabras, si el objeto matemático no es accesible ni perceptual ni instrumentalmente, no es posible decidir si algo es representación de dicho objeto; pero, por otra parte, si no se cuenta con representaciones del objeto, no es posible adquirirlo conceptualmente.

Duval (2006b), resalta la complejidad que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de representaciones completamente diferentes, en tanto producidas en sistemas heterogéneos. Este autor considera que la conversión es una de las operaciones fundamentales para el acceso del sujeto a una verdadera comprensión y centra la mirada en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en dicho proceso.

Los problemas cognitivos para la construcción del objeto matemático han sido asociados usualmente con transformaciones tipo conversión, entre registros de representación, como lo ha puesto en evidencia Duval; sin embargo, es poca la relevancia que se le ha dado a los problemas asociados con transformaciones tipo tratamiento. Es importante tener en cuenta que las transformaciones de tratamiento entre representaciones semióticas —al interior de la variedad de sistemas semióticos utilizados—, no sólo resultan fundamentales en matemáticas sino que también pueden ser fuente de dificultades en los procesos de comprensión por parte de los estudiantes.

En el contexto internacional son varios los trabajos de investigación que abordan específicamente problemáticas relacionadas con las transformaciones semióticas, entre los cuales se resaltan los realizados por Duval (1999, 2004, 2006a); D’Amore (2006b); Godino, Batanero y Font (2007); Font, Godino y D’Amore (2007); D’Amore y Fandiño (2008).

Una de las complejidades asociadas a las transformaciones semióticas tipo tratamiento fue reportada inicialmente por D’Amore (2006b), y puesta en evidencia a partir de ejemplos de situaciones en diferentes niveles de escolaridad, incluido el de educación superior. El siguiente es uno de los ejemplos presentados por este autor.

Se propone a estudiantes de 5º grado de educación básica calcular la probabilidad del siguiente evento: Lanzando un dado se obtenga un número par.

Después de trabajar en pequeños grupos, con la orientación del profesor, los estudiantes comparan que, en tanto los resultados posibles al lanzar un dado son 6 y los que hacen verdadero el evento son 3, la respuesta es $3/6$. También reconocen que dicha probabilidad se puede expresar como 50%, en tanto aceptan la equivalencia entre $3/6$ y $50/100$, propuesta por el profesor. Incluso, algunos de los alumnos reconocen que hablar del 50% significa que “se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles” y que, por lo tanto, debe ser válida como respuesta la expresión $1/2$, la cual es aceptada y validada por los demás compañeros y por el profesor; es decir, los sentidos asignados a los objetos matemáticos son compartidos.¹²

Una vez concluida la sesión de clase, el investigador les plantea a los estudiantes que la fracción $4/8$ también sería una respuesta adecuada, si se tiene en cuenta que es equivalente a $3/6$. Los estudiantes y el profesor manifiestan que no, y, por su parte, el profesor del curso afirma que la fracción $4/8$: “no puede representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8”.

En este caso, plantea el autor, ¿qué explica el cambio del sentido asignado a representaciones del(os) objeto(s) matemático(s)? ¿Por qué no se “articulan” los diferentes sentidos en uno más “amplio”?

El significado según Frege

Como se mencionó anteriormente, cuando se hace uso de un sistema de comunicación se utilizan signos —por ejemplo, términos o expresiones— para referirse a algo que se reconoce dotado de una cierta existencia, que es asumida en un cierto sentido. Uno de los primeros estudios sobre los signos fue realizado por Frege,¹³ quien es considerado uno de

12 Posiblemente sea más adecuado afirmar que “se tienen, o se dan, por compartidos”.

13 Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848–1925), matemático y lógico alemán.

los primeros filósofos del lenguaje; aunque, su interés no era propiamente el lenguaje natural sino fundamentalmente el lenguaje matemático, de hecho estaba interesado tanto en la naturaleza y el sentido de la matemática, como de su lenguaje.

Frege (1985), se pregunta, por ejemplo, si la igualdad —en el sentido de identidad— es una relación entre objetos o entre nombres o signos de objetos. Afirma que los enunciados $a=a$, y, $a=b$ son de diferente valor cognoscitivo; mientras para un sujeto la primera identidad puede afirmarse a priori, la segunda no, en tanto requiere ciertas ampliaciones de su conocimiento. En palabras de este autor:

Si, en general, encontramos que el valor cognoscitivo de “ $a=a$ ” y “ $a=b$ ” es distinto, esto se explica por el hecho de que, para el valor cognoscitivo, el sentido del enunciado, o sea el pensamiento expresado en él, no entra menos en consideración que su referencia, es decir, su valor veritativo. Ahora bien, si $a=b$, la referencia de “ b ” es ciertamente la misma que la de “ a ”, y por lo tanto, también el valor veritativo de “ $a=b$ ” es el mismo que el de “ $a=a$ ”. Sin embargo, el sentido de “ b ” puede ser distinto del sentido de “ a ”, y con ellos también será el pensamiento expresado en “ $a=b$ ” distinto del expresado en $a=a$; pero entonces los dos enunciados tampoco tienen el mismo valor cognoscitivo (p. 84).

Dos de las ideas básicas de Frege, pueden resumirse así:

- El significado de las palabras o expresiones depende del contexto.
- El significado de las oraciones depende del significado de sus partes.

El significado de una expresión se compone de dos aspectos: el sentido y la referencia. El clásico ejemplo dado por este autor, acudiendo a las siguientes dos expresiones, puede resultar ilustrativo:

- (1) *El lucero matutino*
- (2) *El lucero vespertino*

En ambos casos, usando expresiones diferentes escritas en lenguaje natural, se hace referencia a un objeto, que para una persona ilustrada es el mismo: el planeta Venus, aunque cada expresión asociada a un contexto específico y por tanto con un sentido diferenciado; sin embargo, para un sujeto no ilustrado las dos expresiones no sólo tienen diferentes sentidos sino que puede suponer que refieren objetos diferentes; es decir, a las expresiones dadas se les puede asignar significados diferentes.¹⁴

En el ejemplo anterior, en cada caso, se hace referencia —*Bedeutung* o Denotación— a un objeto, acudiendo a un cierto signo —*Zeichen* o Expresión—, que es usado de una cierta manera —*Sinn* o Sentido—.¹⁵ Desde lo propuesto por Frege, a cada signo le corresponde un determinado sentido —que puede ser expresado de diferentes maneras—, y a éste una determinada referencia; sin desconocer que a cada referencia le pueden corresponder muchos signos. Para Frege es fundamental la relación diádica Signo-Sentido, pues reconoce que si bien en algunos casos un signo podría no tener referencia, como el caso de la expresión “el mayor número natural”, en tanto signo, ésta siempre tendrá sentido.

Objeto matemático, significado y sentido

Desde las teorías realistas el significado es una “relación convencional entre el signo y la entidad concreta o ideal que existe independientemente del signo lingüístico; en consecuencia suponen un realismo conceptual” (Godino & Batanero, 1994, p. 4), es decir, el significado no depende del uso. Este supuesto, no es aceptado desde las teorías pragmáticas. Como lo reconoce Vergnaud (1990, 158), desde un punto de vista didáctico y psicológico, el sentido de los conceptos matemáticos es dado por las situaciones, por lo cual el significado de un objeto matemático no puede quedar reducido a su mera definición:

14 El signo de por sí no es portador de significado. Al sustituirse una expresión por otra “equivalente”, en tanto tiene la misma referencia, puede tener un valor cognoscitivo diferente.

15 El sentido tiene que ver con lo cognitivo —cómo el sujeto asume una expresión—, no con lo semántico; para Frege el pensamiento es el sentido del enunciado y no su referencia.

[...] el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo.

Por tanto, para Vergnaud, un concepto es una terna (S, I, F), donde S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto —la referencia—, I es el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operatividad de los esquemas —el significado— y F es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento —el significante—.

Así, desde un punto de vista pragmático, el significado depende tanto del contexto como del uso por parte de un sujeto. Para Wittgenstein, por ejemplo, el significado de una palabra, en un gran número de casos, es su uso en el lenguaje siguiendo ciertas reglas. En otros términos, comprender una palabra o un concepto significa su uso gramaticalmente correcto, entender su función en un “juego lingüístico” (D’Amore, 2001, p. 13).

Si se asume una teoría pragmática del significado, los objetos matemáticos deben verse como:

[...] símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. El hecho de que en el seno de ciertas instituciones se hagan determinados tipos de prácticas, determina la emergencia progresiva de los *objetos matemáticos* y que su *significado* esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello no se puede reducir el significado del objeto a su mera definición matemática (D’Amore & Godino, 2007, p. 207).

Así, para D’Amore y Godino (2007), el significado —institucional/personal— de un objeto es el sistema

de prácticas (institucionales/personales— asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado, prácticas para las cuales el objeto es determinante.

Ahora bien, siguiendo ideas de Font & Ramos (2005), definir el significado de un objeto matemático en términos de configuraciones epistémicas y de prácticas asociadas, tal como se propone en el enfoque onto-semiótico (EOS), posibilita distinguir sentido de significado, en tanto el primero puede asumirse como un significado parcial, en el marco de un subconjunto de sistemas de práctica; pues, por ejemplo, dependiendo del contexto o del tipo de notación, cada objeto matemático se puede relacionar con unos o con otros objetos matemáticos. En palabras de estos autores:

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas permite agrupar prácticas específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, y que adquieren un determinado sentido que permite establecer clases. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos (p. 319).

El sentido no depende propiamente del objeto, sino que éste le es atribuido por un sujeto —sea éste un individuo, un grupo de individuos o una institución— en una situación específica. Es decir, el sentido atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que se aborde y, por tanto, es algo flexible, dinámico, en movimiento.

El significado de un objeto, como lo asume Radford (2006b), es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto, es más estable; podría decirse que el significado es más descontextualizado y general,¹⁶ por su parte el sentido puede considerarse como un significado contextual de dicho objeto. Es decir, el sentido es relativo a varias modalidades

¹⁶ Para este autor los objetos matemáticos son “patrones fijos de actividad reflexiva (...) incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos” (p. 111); tales artefactos pueden ser objetos, instrumentos, sistemas de signos, entre otros.

sensoriales y semióticas, y está asociado más a la pragmática, mientras el significado está más asociado a la semántica cultural.

Desde los planteamientos de Radford, la objetivación —considerada como toma de conciencia subjetiva del objeto cultural— es un proceso de dotación de sentidos cuya finalidad dentro del contexto de la actividad de la clase es precisamente una aproximación hacia el significado. Se trata pues del proceso del sentido del objeto en su camino hacia el significado. El problema didáctico, pues, es el de posibilitar o dar cuenta de un camino que lleva del(los) sentido(s) al significado.

Bibliografía

- Castañares, W. (1985). El signo: problemas semióticos y filosóficos (Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid). Acceso: Disponible en: <http://www.unav.es/gep/TesisDoctorales.html>
- Castañares, W. (2000). La semiótica de Peirce C. S. y la tradición lógica. *Seminario de Estudios Peirceanos* (Octubre 21 de 2000, Universidad de Navarra). Disponible en: <http://www.unav.es/gep/Castanares.html>
- D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. En: *Uno*. 27: 51-76.
- D'Amore, B. (2005). Pipas, caballos, triángulo y significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. En: *Números*. 61: 3-18.
- D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la Matemática* (Balderas, A. Trad.). Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford L. y D'Amore B. (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. Número Especial de la revista *Relime*.

- D'Amore, B. & Godino, J. (2007). El enfoque onto-semiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. En: *Relime*, 10 (2): 191-218.
- D'Amore, B. & Fandiño, M. (2008, March). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *Symposium on the Occasion of the 100th Anniversary of ICMI*, Rome. Disponible en: <http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Vega, M. Trad.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (Vega, M. Trad.). Cali: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006a). Transformations de representation semiotiques et demarches de pensee en mathematiques, 67-89. En : Rauscher J-C. (Ed.). *Actes du XXXIe Colloque COPIRELEM*. Strasbourg: IREM.
- Duval, R. (2006b). Du mot au concept conversion. Le Séminaire. Collection «*Sciences de l'éducation*». Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.
- Eco, U. (1986). *La estructura ausente: Introducción a la semiótica* (Serra, F. Trad.). Barcelona: Lumen.
- Font, V. & Ramos, B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, 338: 309-345.
- Font, V., Godino, J. & d'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2): 2 -7.
- Frege, G. (1985). Sentido y referencia (Moulines, U. Trad.). En: *Estudios sobre semántica* Madrid: Orbis.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355. Disponible en; http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#signi_sistemicos
- Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The on-tosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2): 127-135.
- Radford, L. (2006a). Semiótica y educación matemática (pp. 7-21). En Radford L., D'Amore B. (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. Número Especial de la revista *Relime*.
- Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. En: Radford L., D'Amore, B. (Eds.). *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*. Número Especial de la revista *Relime*.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3): 133-170.
- Vygotski, L. (2001). Pensamiento y Lenguaje (Bravo, J. Trad.). En: Vygotski, L. *Obras escogidas*, Tomo II: 9-348. Madrid: Machado Libros.